Rozwiązania Kolokwium 1

WRAiT 1, 28.11.2017r.

ZADANIE 1.

(1) **TAK**, domknięcie dowolnego zbioru jest zbiorem domkniętym.

(2) **TAK**, A jest nigdziegęsty $\iff \operatorname{Int}\operatorname{Cl} A = \emptyset \overset{\operatorname{Cl}\operatorname{Cl} A = A}{\iff} \operatorname{Int}\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \emptyset \iff$ $\operatorname{Cl} A$ jest nigdziegęsty.

(3) **NIE**, zbiór $\{0\}$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, d_E)$ jest spójny, ale nie jest otwarty.

(4) **NIE**, funkcje ciągłe przenoszą własność spójności (obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągła jest spójny), zbiór X jest spójny, a Y nie jest (bo $(-\infty,-2)$ i $(2,\infty)$ są otwarte, rozłączne i sumują się do całego zbioru). Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla zwartości.

ZADANIE 2.

(a) Sprawdźmy kolejno warunki z definicji metryki.

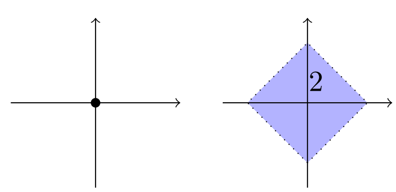
(1) *Dodatnia określoność.* Z określenia ρ mamy, że $\rho(x,y) = 0$ jeśli $x = y$ i $\rho(x,y) \geqslant 1$ dla $x \neq y$.

(2) *Symetria.* Wyrażenie definiujące ρ jest symetryczne ze względu na x oraz y: jeśli $x = y$ to $\rho(x,y) = 0 = \rho(y,x)$, jeśli $x \neq y$ to wynika to z własności modułu $|\cdot|$.

(3) *Warunek trójkąta.* Weźmy dowolne punkty x, y, z. Jeśli dowolne dwa z tych punktów są sobie równe to nierówność $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,z)$ jest oczywista. Pozostał do rozważenia przypadek, gdy są parami różne. Mamy

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &= 1 + |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\
&\leqslant 1 + (|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|) + (|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|) \\
&\leqslant (1 + |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|) + (1 + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) \\
&= \rho(x,z) + \rho(y,z).
\end{aligned}$$

(b) Mamy $K((0,0),\frac{1}{2}) = \{(0,0)\}$, kula $K((0,0),3)$ jest równa kuli o środku $(0,0)$ i promieniu 2 w metryce taksówkowej (patrz rysunek).

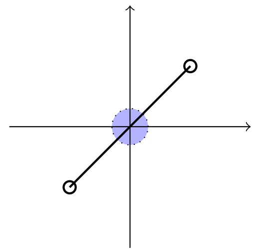


$K((0,0),\frac{1}{2})$ $K((0,0),3)$

ZADANIE 3.

(a) **NIE**, zauważmy, że dla żadnego $r > 0$ kula $K((0,0),r)$ nie zawiera się w zbiorze (patrz rysunek).

(b) **TAK**, ponieważ dopełnienie jest otwarte (wokół każdego punktu dopełnienia znajdziemy małą kulkę, która zawiera się w dopełnieniu). Potencjalny problem mogłyby stanowić jedynie punkty o współrzędnych całkowitych, ale one nie należą do dopełnienia. Inaczej można to uzasadnić stwierdzając, że zbiór zawiera wszystkie



RYSUNEK 1. Kula $K((0,0),r)$ nie zawiera się w A dla żadnego $r > 0$.

granice ciągów swoich elementów (jedyne zbieżne ciągi liczb z tego zbioru to ciągi od pewnego miejsca stałe lub ciągi zbieżne do liczb całkowitych).

(c) **NIE**, ponieważ jest to zbiór nieograniczony (znajdziemy punkty, które są od siebie dowolnie daleko, np. $d_E(3,3^n) = 3^n - 3 \to \infty$ gdy $n \to \infty$). W przestrzeniach euklidesowych z metryką euklidesową zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

(d) **NIE**, w metryce dyskretnej każdy zbiór jest domknięty, to mamy $\operatorname{Cl}\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

ZADANIE 4. Z definicji brzegu mamy

$$\operatorname{Bd} A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A, \qquad \operatorname{Bd}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A),$$

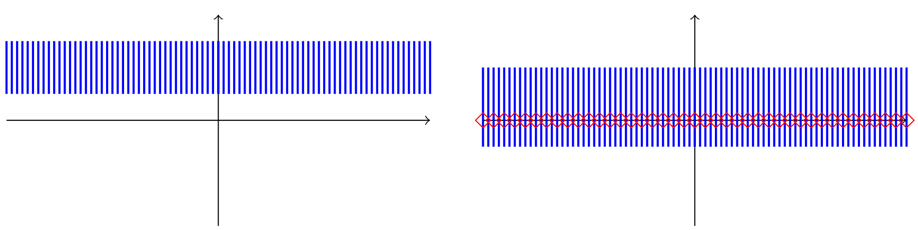
bo $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$. Oczywiście $A \subset \operatorname{Cl} A$, czyli $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int}\operatorname{Cl} A$, co implikuje

$$\operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A \supset \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A).$$

Kontrprzykładem dla przeciwnej inkluzji jest $A = \mathbb{Q}$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, d_E)$. Mamy $\operatorname{Bd}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, ale $\operatorname{Bd}\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \operatorname{Bd}\emptyset = \emptyset$.

ZADANIE 5.

(a) Sprawdźmy, że przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty. Wystarczy sprawdzić, że przeciwobraz dowolnej kuli (odcinka) jest otwarty. Ale dla dowolnego odcinka (a,b) mamy $f^{-1}[(a,b)] = \mathbb{R} \times (a,b)$. Ten zbiór jest otwarty jako suma kul (w zależności od tego, czy $0 \in (a,b)$ albo kul postaci $\{c\} \times (a,b)$, albo kul postaci $\{c\} \times (a,b)$ i kul jak w metryce taksówkowej o środkach na osi $y = 0$, patrz rysunek). Funkcja nie jest różnowartościowa, więc nie jest homeomorfizmem.



(b) Ponieważ metryka euklidesowa jest równoważna z metryką taksówkową, to wystarczy sprawdzić ciągłość funkcji z $(\mathbb{R}, d_E)$ do $(\mathbb{R}, d_E)$. Skorzystamy z definicji ciągowej: weźmy $(x_n, y_n) \to (x,y)$, jest to równoważne zbieżności po współrzędnych $x_n \to x$, $y_n \to y$, czyli mamy $f(x_n, y_n) = (x_n, x_n + y_n) \to (x, x+y) = f(x,y)$, co implikuje ciągłość. Funkcja jest homeomorfizmem: łatwo sprawdzić, że $f^{-1}(x,y) = (x, y-x)$ jest funkcją odwrotną i jest ona ciągła (argument jak wyżej).

Agnieszka Hejna