Zadanie 1.

1(a) Wykazać bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx.$$

1(b) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n}.$$

Zadanie 2. Pokazać, że istnieje jedyna różniczkowalna funkcja $f(x)$ określona na całej prostej spełniająca $f(0) = 0$ oraz

$$f'(x) = 1 - f(x)^4.$$

Udowodnić, że istnieje granica $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i obliczyć jej wartość.

Zadanie 3. Umieścić na płaszczyźnie okrąg i parabolę tak, by miały dokładnie dwa punkty wspólne, w jednym z których byłyby one styczne, a w drugim – nie.

Zadanie 4. W pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ znajdź 11 elementów odwracalnych.

Zadanie 5. Znajdź równania prostych zawierających główne przekątne sześcianu (tj. przekątne przechodzące przez środek sześcianu) wiedząc, że współrzędne trzech spośród wierzchołków sześcianu wynoszą $(0, 0, 0)$, $(2, -2, -1)$ i $(1, -1, 4)$.

Zadanie 6. Mówimy, że przestrzeń metryczna jest *zerowymiarowa*, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, każdy punkt ma otoczenie otwarte o średnicy $< \varepsilon$ i brzegu pustym.

6(a) Podaj przykłady trzech niehomeomorficznych i nieprzeliczalnych zerowymiarowych podprzestrzeni prostej euklidesowej, nie zawierających punktów izolowanych.

6(b) Czy jest prawdą, że przestrzeń zerowymiarowa nie może zawierać podprzestrzeni spójnych o mocy > 1?

6(c) Udowodnij, że istnieje metryka d na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, taka że $(\mathbb{R}^2, d)$ jest ośrodkową przestrzenią zerowymiarową.

Zadanie 7. Niech f będzie funkcją określoną na prostej euklidesowej w dowolny zbiór Y, o spójnych przeciwobrazach punktów.

7(a) Pokaż, że rodzina $\mathcal{A} = \{f^{-1}(y) : y \in Y, |f^{-1}(y)| > 1\}$ musi być przeliczalna.

7(b) Korzystając z własności (a), pokaż, że prosta euklidesowa nie jest homeomorficzna z żadną n–wymiarową przestrzenią euklidesową dla $n > 1$.

7(c) Czy rodzina $\mathcal{B} = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ musi mieć następującą własność:
(*) dla każdego $\varepsilon > 0$ co najwyżej skończenie wiele zbiorów z $\mathcal{A}$ ma średnicę $> \varepsilon$?
Niech $g = f|[0, 1]$. Czy rodzina $\mathcal{C} = \{g^{-1}(y) : y \in Y\}$ musi mieć własność (*)?

Zadanie 8. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zdarzeń, $P(A_n) = p_n$, $p_n \in (0,1)$; niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych zdefiniowanych wzorem $X_n(\omega) = I_{A_n}(\omega)$. Podać odpowiedzi wraz z ich pełnymi uzasadnieniami na następujące pytania:

8(a) Kiedy ciąg $\{X_n\}$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem jeden ?

8(b) Czy ciąg $\{X_n\}$ spełnia centralne twierdzenie graniczne, gdy $p_n = p$?

8(c) Jaka jest szansa, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń A_n, gdy $p_n = p$?

Zadanie 9. Niech X, Y będą wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym ze średnią zero i wariancją $0 < \sigma^2 < \infty$, określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a Z dowolną zmienną losową określoną na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

9(a) Podać definicje:

(i) warunkowej wartości oczekiwanej $E(X|Z)$,
(ii) warunkowego prawdopodobieństwa $P(A|Z)$,
(iii) regularnej wersji rozkładu warunkowego $P(X \in B|Z)$.

9(b) Obliczyć $E(X|X+Y)$.

9(c) Obliczyć $P(X \leqslant x|X+Y=t)$.

Zadanie 10. Niech $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$, $n \geqslant 2$, będzie obserwowalnym wektorem losowym o rozkładzie normalnym i nieskorelowanych składowych z jednakową wariancją $\sigma^2 > 0$ oraz wartościami oczekiwanymi $EY_i = \alpha + \beta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie x_i są znanymi liczbami, przy czym $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, a α i β są nieznanymi parametrami rzeczywistymi. Wyznaczyć estymatory parametrów α i β metodą:

10(a) największej wiarogodności;

10(b) najmniejszych kwadratów.

Zbadać w każdym z obu przypadków, czy są to estymatory nieobciążone z jednostajnie minimalną wariancją.