Zadanie 1. Funkcja f jest ciągła na prostej rzeczywistej. Niech B oznacza domkniętą kulę o promieniu 1 i środku w początku układu w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Pokazać, że

$$\int_B f(3x+4y)\,dx\,dy = \int_B f(5x)\,dx\,dy.$$

Następnie obliczyć całkę dla funkcji $f(t) = \sqrt{|25-t^2|}$.

Zadanie 2. Bez użycia kalkulatora zbadać, która z liczb jest większa: e^π czy π^e .

Zadanie 3. Jednostkowy kwadrat zawarty w pewnej płaszczyźnie zrzutowano prostopadle na losową prostą (zawartą w tej płaszczyźnie). Znaleźć wartość oczekiwaną długości rzutu.

Zadanie 4. Udowodnić, że jeśli grupa ma więcej niż dwa elementy, to ma nietrywialny automorfizm.

Zadanie 5. Udowodnić, że jeśli A i B są rzeczywistymi macierzami kwadratowymi, takimi że $AB - BA = A$, to $\det A = 0$.

Zadanie 6. Przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ między zwartymi przestrzeniami metrycznymi nazywa się monotoniczne, gdy ma spójne przeciwobrazy punktów.

(i) Udowodnić, że jeśli f jest monotoniczne, to spójne są również przeciwobrazy zbiorów domkniętych spójnych.

(ii) Udowodnić, że nie istnieje przekształcenie monotoniczne odcinka $[0,1]$ na kwadrat $[0,1]^2$.

(iii) Niech X będzie stożkiem nad ciągiem harmonicznym, tzn. X jest sumą odcinków na płaszczyźnie, łączących punkt o współrzędnych $(0,1)$ z punktami o współrzędnych $(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{3},0),\ldots$. Podobnie, niech Y oznacza stożek nad zbiorem Cantora, zdefiniowany analogicznie jako suma odpowiednich odcinków łączących punkt $(0,1)$ z punktami zbioru Cantora na osi odciętych. Udowodnić, że nie istnieje przekształcenie monotoniczne z Y na X.

Zadanie 7. Niech $P(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X i niech

$$f : P(X) \to P(X)$$

będzie taką funkcją, że dla dowolnych $A, B \in P(X)$, jeśli $A \subseteq B$ to $f(A) \subseteq f(B)$. Wykazać, że istnieje $C \in P(X)$, taki że $f(C) = C$.

Zadanie 8. Labirynt rozpoczyna się w punkcie P_1 trzema drogami: A,B i C. Droga A prowadzi do punktu P_2, i czas jej przejścia jest równy 3 godziny. Drogi B i C prowadzą do punktu P_1 i ich czasy przejścia wynoszą odpowiednio 2 i 5 godzin.
Znaleźć średni czas dojścia do punktu P_2 w następujących przypadkach:

(i) W każdej próbie wybiera się spośród dróg, które nie były wybrane w poprzednich wyborach. Na początku wszystkie drogi są jednakowo prawdopodobne, za drugim razem drogi, które nie były wybrane za pierwszym razem są jednakowo prawdopodobne itd.

(ii) Drogi A, B i C są wybierane odpowiednio z prawdopodobieństwami $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ i za każdym razem niezależnie od poprzednich wyborów.

Znaleźć wariancję czasu dojścia do punktu P_2 w przypadku (ii).

Zadanie 9. Zdefiniować:

(i) warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej X względem σ ciała $\mathcal{A}$.

(ii) regularną wersję rozkładu warunkowego zmiennej losowej X względem zmiennej losowej Y mierzalnej względem σ ciała $\mathcal{A}$.

Obliczyć:

(a) $E(X|X + Y = a)$, gdy zmienne losowe X i Y są wzajemnie niezależne i o tym samym rozkładzie.

(b) $E(X|X < c)$ gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ.

(c) $P(X_1 < X_2 < X_3)$ gdy zmienne losowe X_1, X_2 i X_3 są wzajemnie niezależne o rozkładach wykładniczych odpowiednio z parametrami λ_1, λ_2 i λ_3.

Zadanie 10. Niech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu P ze skończoną wariancją σ^2. Zbadać, czy istnieje nieobciążony estymator z jednostajnie minimalną wariancją dla dyspersji σ, gdy P jest rozkładem zero-jedynkowym $b(1, p)$, $0 < p < 1$. Odpowiedź uzasadnić.