EGZAMIN KWALIFIKACYJNY
NA STUDIA DOKTORANCKIE MATEMATYKI
30.05.2003

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 6 punktów. Cztery najsłabiej rozwiązane (lub nierozwiązane) zadania nie będą brane pod uwagę przy końcowej punktacji.

Zadanie 1: Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale lewostronnie otwartym $(0,1]$, spełniającą następujący warunek:

Dla każdego ciągu liczb wymiernych dodatnich $r_n \in (0,1]$ zbieżnego do zera, ciąg $f(r_n)$ jest zbieżny do granicy skończonej przy $n \to \infty$. Udowodnij, że:

(1) istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego ciągu $r_n \in (0,1]$ liczb wymiernych zbieżnego do zera mamy $\lim_{n\to\infty} f(r_n) = a$;

(2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = a$, gdzie a jest liczbą z (1);

(3) funkcja f jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 2: (1) Czy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$$

jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$?

(2) Funkcja f jest dodatnią, malejącą funkcją ciągłą na przedziale $[1,\infty)$ taką, że całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} t f(t)\, dt$$

jest zbieżna.

(a) Uzasadnij, że

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} t f(t)\, dt = 0.$$

(b) Stosując (a), udowodnij, że

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0.$$

Zadanie 3: Wykazać, że dla dowolnego niepustego zbioru X nastepujące warunki są równoważne

(i) istnieje funkcja różnowartościowa $f : X \to [0,1]$;

(ii) istnieje funkcja g, odwzorowująca $[0,1]$ na X;

(iii) istnieje funkcja h odwzorowująca $[0,1]\times[0,1]$ na X.

Zadanie 4: Niech U będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, takim że $[0,1]\times[0,1] \subset U$. Udowodnić, że istnieje liczba $\delta > 0$, dla której

$$[-\delta, 1+\delta]\times[-\delta,1+\delta] \subset U.$$

Zadanie 5: Znajdź czworokąt wypukły $ABCD$ o bokach $AB = BC = CD = 1$ na płaszczyźnie euklidesowej, mający największe pole spośród takich czworokątów.

Zadanie 6: Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma n różnych wartości własnych, zaś $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n$ jest bazą wektorów własnych w $\mathbb{R}^n$ dla F.

(1) Uzasadnij, że jeśli

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n \quad \text{gdzie} \quad a_i \neq 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n,$$

to układ $\mathbf{u}, F(\mathbf{u}), \dots, F^{n-1}(\mathbf{u})$ jest liniowo niezależny.
Wskazówka: skorzystaj ze wzoru

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(t_i - t_j).$$

(2) Znajdź, wraz z uzasadnieniem, wszystkie podprzestrzenie $F-$ niezmiennicze w $\mathbb{R}^n$, tzn. wszystkie podprzestrzenie $W \subset \mathbf{R}^n$ takie, że $F(W) \subset W$.

Zadanie 7: Niech $X = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $[p, p+1]$. Udowodnić, że estymator postaci

$$T_n = \max_{1 \le i \le n} X_i - \frac{n}{n+1}$$

parametru p jest nieobciążony i zgodny.

Zadanie 8: Niech $X = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Skonstruować test najmocniejszy na poziomie istotności α do weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$, przy hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu = \mu_1$, gdzie $\mu_1 > \mu_0$.

Zadanie 9: W chwili $t = 0$ w pewnym obszarze znajduje się jedna cząstka. W chwilach $t = 1, 2, \dots, n, \dots$ każda cząstka albo znika z prawdopodobieństwem q, albo przekształca się w m takich samych cząstek z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$. Przyjmujemy, że cząstki ewoluują w sposob niezależny. Jaka jest średnia liczba cząstek w chwili $t = n$?

Zadanie 10: Czas pracy pewnego podzespołu do chwili awarii jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości postaci

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

(1) Rozważmy sytuację, w której niesprawny podzespół jest natychmiast zastępowany innym sprawnym podzespołem tego samego typu. Niech X_i oznacza czas do awarii i-tego pracującego podzespolu; wtedy $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ reprezentuje czas do n-tej awarii. Intensywność awarii r definiujemy jako wartość granicy

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n} \quad \text{w sensie zbieżności prawie wszędzie.}$$

Zakładając, że zmienne losowe X_i, $i \ge 1$, są niezależne, podaj wartość r.

(2) Rozważmy urządzenie, składające sie z dwóch niezależnie pracujących podzespołow. Urządzenie uznajemy za sprawne, gdy przynajmniej jeden z podzespołów, wchodzących w jego skład, jest sprawny. Urządzenie to ulega awarii, gdy oba podzespoly stają się niesprawne. Jaki jest rozkład czasu do awarii tak opisanego urządzenia?