

5. ALGORYTM SIMPEKS - WYZNACZANIE WARTOŚCI NAJWIĘKSZEJ (NAJMNIEJSZEJ) FUNKCJI LINIOWEJ NA WIEŁOŚCIANIE WYPUKŁYM

5.1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Bezpośrednim zastosowaniem teorii układów nierówności liniowych jest problem wyznaczenia wartości największej (najmniejszej) liniowej funkcji wielu zmiennych, która jest określona na wielościanie¹ wypukłym $\mathcal{X}$.

Formalnie problem ten można sformułować następująco²:

- wyznaczyć wartość największą (najmniejszą) liniowej funkcji n zmiennych postaci:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (4.28)$$

lub w zapisie macierzowym

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (4.29)$$

gdzie

$$\mathbf{c}^T = [c_1, c_2, \dots, c_n]; \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$$

na niepustym zbiorze $\mathcal{X}$, który zawiera wszystkie rozwiązania układu nierówności liniowych o nieujemnych składowych tzn.

¹Zbiór $\mathcal{X}$ nie musi być, jak dalej zauważymy - wielościanem wypukłym.
²Problem określony wzorami (4.29) - (4.30) nosi w literaturze nazwę zadania programowania liniowego i jego rozwiązywaniem obok analizy matematycznej zajmuje się odrębna dyscyplina - Teoria programowania liniowego.

$$\mathcal{X} = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x} \in R^n \wedge \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \wedge \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \quad (4.30)$$

W dalszych rozważaniach uwzględnimy tylko te fragmenty, niezbędnej do zrozumienia i analizy tego problemu wiedzy, która w szczególności pozwoli odpowiedzieć na trzy podstawowe pytania:

1. Czy sformułowany przez nas problem posiada w ogóle rozwiązanie?
2. Jeżeli tak, to czy istnieją w zbiorze $\mathcal{X}$ jakieś szczególne punkty, w których funkcja $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ może osiągnąć swą wartość największą (najmniejszą)?
3. Jeżeli takie punkty istnieją, to jak te punkty zbioru $\mathcal{X}$ wyznaczyć?

Reasumując, należy więc odpowiedzieć na trzy pytania: czy to czego szukam istnieje?, jeżeli tak, to gdzie? i - jak to co istnieje, znaleźć?

Pozytywnej odpowiedzi na wszystkie te pytania można udzielić w oparciu o następujące twierdzenia:

4.30 tw. Funkcja wielu zmiennych $f(\mathbf{x})$ określona i ciągła na domkniętym i ograniczonym zbiorze $D \subset R^n$ osiąga na tym zbiorze swą wartość największą to znaczy, że istnieje punkt $\mathbf{x}_1 \in D$ taki, że

$$f(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x});$$

oraz osiąga na tym zbiorze swą wartość najmniejszą, to znaczy, iż istnieje punkt $\mathbf{x}_2 \in D$ taki, że

$$f(\mathbf{x}_2) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}).$$

Twierdzenie 4.30 daje pozytywną odpowiedź na pytanie pierwsze, bowiem funkcja liniowa $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ jest ciągła dla $\mathbf{x} \in R^n$, więc

jest ciągła w każdym podzbiornie $X = D \in R^n$, jeżeli zaś zbiór X jako zbiór rozwiązań układu nierówności jest wielościannym wypukłym, to jest on domknięty i ograniczony. Powstaje tylko wątpliwość i pytanie, co będzie gdy zbiór X jest nieograniczonym wielościennym zbiorem wypukłym? W tym przypadku nie jest spełnione jedno z założeń tw. 4.30, ale tę kwestię pozwoli rozstrzygnąć następujące twierdzenie.

4.31. tw. Jeżeli funkcja liniowa $f(x) = c^T x$ osiąga skończoną wartość największą (najmniejszą) na domkniętym i wypukłym zbiorze X o skończonej liczbie wierzchołków, to wartość tę osiąga w przynajmniej jednym punkcie wierzchołkowym zbioru X .

Sens twierdzenia 4.31 jest następujący - jeżeli funkcja $f(x) = c^T x$ osiąga skończoną wartość największą równą M na zbiorze X tzn. $M = \max_{x \in X} f(x)$, to $M = f(x_1^*)$, gdzie x_1^* jest jednym z wierzchołków zbioru X .

Podobną interpretację można podać dla wartości najmniejszej - jeżeli $m = \min_{x \in X} f(x)$ to $m = f(x_2^*)$, gdzie x_2^* jest również jakimś wierzchołkiem zbioru X (nie muszą to być oczywiście wierzchołki sąsiednie). Czytelnikowi pozostawiamy odpowiedź na pytanie, czy może być $x_1^* = x_2^*$?

Twierdzenie 4.31. odpowiada na pytanie drugie, w jakich punktach zbioru X określonego przez warunek (4.30) funkcja liniowa osiąga swą skończoną wartość największą (najmniejszą), przy czym zbiór X nie musi już być zbiorem ograniczonym.

Twierdzenie 4.31. pośrednio odpowiada również i na ostatnie pytanie.

Skoro bowiem szukane punkty są wierzchołkami zbioru X , a ten jest zbiorem rozwiązań układu nierówności liniowych, zaś wierzchołki tego zbioru potrafimy wyznaczyć na podstawie rozwiązań bazowych o nieujemnych składowych równoważnego uk-

ładu równań, to oznacza więc, że wiemy czego należy szukać i jak to należy robić.

4.32. prz. Wyznaczyć wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$ (albo w zapisie macierzowym $f(x) = [3 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$) na zbiorze

$$X = \{x: x \in R^2 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge x \geq 0\}.$$

Zbiór X jest ograniczonym i domkniętym zbiorem rozwiązań układu nierówności z przykładu 4.18 (por. rys. 4.20), a wierzchołki tego zbioru określają wektory:

$$x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; x_2^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}; x_3^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; x_4^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}; x_5^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Na mocy twierdzenia 4.30 badana funkcja osiąga swą wartość największą i wartość najmniejszą w zbiorze X , zaś na mocy twierdzenia 4.31 punktami gdzie się to dzieje są wierzchołki zbioru X . Obliczmy więc, wartości funkcji w kolejnych wierzchołkach:

$$f(x_1^*) = [3 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0; f(x_2^*) = [3 \quad -1] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3/2;$$

$$f(x_3^*) = [3 \quad -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 8; f(x_4^*) = [3 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = -2 \text{ i}$$

$$f(x_5^*) = [3 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = -3.$$

Zatem, największą wartość równą 8 osiąga badana funkcja w wierzchołku $x_3^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ tzn. w punkcie o współrzędnych $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, zaś najmniejszą wartość równą (-3) osiąga w wierzchołku $x_5^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ tzn. w punkcie o współrzędnych $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Czytelnik w podobny sposób może wyznaczyć wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ na zbiorze X z przykładu 4.32 oraz dla obu tych funkcji na innych zbiorach X , będących rozwiązaniami układów nierówności z przykładów analizowanych w rozdziale 4.

5.2. ALGORYTM SIMPLEKS

Analiza nierówności przykładu 4.32 nasuwa jednak pewne pytania i wątpliwości np:

- czy zawsze należy dokonywać przeglądu wszystkich wierzchołków w zbiorze X ? (wiemy jak jest to kłopotliwe przy większej niż dwie liczbie niewiadomych);

- w jaki sposób poznać i rozstrzygnąć, że dana funkcja liniowa nie osiąga na zbiorze X swej skończonej wartości największej (najmniejszej)? Można się domyślać, że zbiór X jest wówczas nieograniczony;

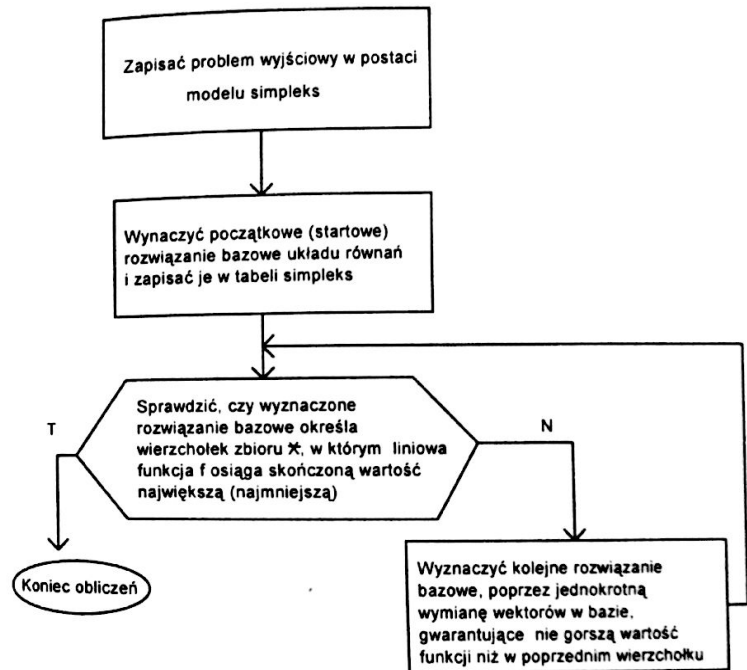
- czy funkcja liniowa może osiągnąć wartość największą (najmniejszą) w więcej niż jednym punkcie zbioru X ?

Odpowiedź na te pytania uzyskamy posługując się pewną procedurą numeryczną zwaną **algorytmem simpleks**.

Algorytm simpleks jest to procedura numeryczna, która pozwala dokonać kontrolowanego przeglądu tylko części kolejnych wierzchołków zbioru X i dla każdego z nich pozwala ocenić, czy liniowa funkcja f osiągnęła już swą wartość (najmniejszą) największą; albo stwierdzić, że funkcja ta nie osiąga skończonej war-

tości najmniejszej (największej) w zbiorze X . Schemat postępowania w algorytmie simpleks zaprezentowany został na rys. 4.24.

Schemat blokowy postępowania w algorytmie simpleks



Rys. 2.24.

Omówimy dalej bardziej szczegółowo kolejne fragmenty tego postępowania.

1. Zapisanie problemu w postaci modelu simpleks.

Z poprzedniego rozdziału wiadomo, że aby można było określić wierzchołki zbioru X rozwiązań układu nierówności, należy układ nierówności sprowadzić do równoważnego układu równań, dołączając do każdej nierówności niewiadome swobodne

y_i i ewentualnie, jeżeli zachodziła konieczność, niewiadome sztuczne t_r . Wszystkie te nowe niewiadome muszą zostać uwzględnione jako nowe zmienne w liniowej funkcji $\tilde{f}$ równej sumie funkcji $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i funkcji liniowej g , której argumentami (zmiennymi) są właśnie **dołączone niewiadome**, przy czym:

- współczynniki przy każdej **niewiadomej swobodnej** y_i są **zawsze równe zero**;

- jeżeli pojawiają się niewiadome sztuczne t_r , to współczynniki przy tych zmiennych przyjmują wartości równe $(-M)$ w przypadku wyznaczenia wartości największej funkcji f , zaś $(+M)$ gdy poszukujemy wartości najmniejszej funkcji f , przy czym M jest dowolnie dużą liczbą dodatnią.

Zatem przy wyznaczeniu **wartości największej**, funkcję liniową

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

zamieniamy na funkcję $\tilde{f}$ postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, t_1, \dots, t_k) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ g(y_1, y_2, \dots, y_m, t_1, \dots, t_k) = \\ &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + 0y_1 + 0y_2 + \dots + 0y_m - Mt_1 - Mt_2 + \dots + (-M)t_k, \end{aligned}$$

bądź w zapisie macierzowym:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + \mathbf{0}^T \mathbf{t} + (-M) \mathbf{j}^T \mathbf{t}.$$

Przy wyznaczeniu **wartości najmniejszej**, funkcję liniową f zamieniamy na funkcję $\tilde{f}$, gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, t_1, \dots, t_k) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ g(y_1, y_2, \dots, y_m, t_1, \dots, t_k) = \\ &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + 0y_1 + 0y_2 + \dots + 0y_m + Mt_1 + Mt_2 + \dots + (+M)t_k. \end{aligned}$$

a w zapisie wektorowym

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + \mathbf{0}^T \mathbf{t} + \mathbf{M} \mathbf{j}^T \mathbf{t}.$$

Funkcje $\tilde{f}$ i f są równe

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, t_1, \dots, t_k) \quad (4.31)$$

jeżeli zmienne funkcji $\tilde{f}$ określają rozwiązanie równoważnego układu równań, które wyznacza wektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathcal{X}$.

Model simpleks jest to taki zapis zadania wyjściowego (4.29-4.30) w którym układ nierówności zamieniono na równoważny układ równań, a liniową funkcję f zastąpiono funkcją $\tilde{f}$, w której uwzględnia się wszystkie nowe niewiadome tego układu (jako nowe zmienne) z odpowiednimi współczynnikami.

2. Wyznaczanie startowego rozwiązania bazowego i zapis tego rozwiązania w tablicy simpleks

Startowe rozwiązanie bazowe wyznaczamy dla modelu simpleks zgodnie z zasadami omówionymi w rozdziale 4. Rozwiązanie to i wszystkie następne zapisujemy w odpowiedniej tablicy tw. **tabeli simpleks**, którą budujemy według następującego schematu:

Tablica 11

Nr rozwiąz.	$\mathbf{c}^B$	Baza	Niewiad. bazowe							Wart. niew. baz.	Wart. kryt.
				$x_1 \dots x_n \quad y_1 \dots y_m \quad t_1 \dots t_k$ $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n \mathbf{p}_{n+1} \dots \mathbf{p}_{n+m} \dots \mathbf{p}_N$							
"1"											
$\Delta_j = z_j - c_j$										$f(\mathbf{x}^*)$	

Jak widać tablica 11 jest to rozbudowana nieco, używana dotychczas do zapisu kolejnych rozwiązań bazowych, tablica jaką posługiwaliśmy się w rozdziale 4. Nowe fragmenty tabeli 11 to:

- dodatkowa kolumna w boczku tabeli - $\mathbf{c}^B$, zawierająca współczynniki stojące przy tych zmiennych liniowej funkcji $\tilde{f}$, które w układzie równań występują jako niewiadome bazowe;
- dodatkowy (zerowy) wiersz w główce tabeli nad niewiadomymi układu równań, zawierający współczynniki stojące przy zmiennych w liniowej funkcji $\tilde{f}$ (niewiadome układu równań są tu bowiem jednocześnie zmiennymi albo inaczej argumentami, funkcji $\tilde{f}$).

- dodatkowy $m+1$ wiersz (pod całą tabelą) który zawiera tak zwane **wskazniki optymalności** Δ_j , obliczane dla każdego wektora $\mathbf{p}_j$ odpowiadającego niewiadomym układu równań (albo zmiennym funkcji $\tilde{f}$). Ostatni element w tym wierszu jest równy wartości funkcji f w punkcie wierzchołkowym wyznaczonym przez to rozwiązanie bazowe.

3. Sprawdzenie, czy wyznaczone rozwiązanie bazowe określa wierzchołek, w którym badana funkcja osiąga swą skończoną wartość największą (najmniejszą).

Nim sformułujemy twierdzenie z którego wynika kryterium pozwalające stwierdzić czy postępowanie numeryczne można zakończyć, czy należy je kontynuować dalej, wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech $\mathbf{x}_*$ oznacza jakiś wierzchołek w zbiorze $\mathcal{X}$ wyznaczony na podstawie rozwiązania bazowego $\begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}_{B'}$ o bazie B' , zaś $\mathbf{x}_*$ kolejny wierzchołek zbioru $\mathcal{X}$ wyznaczony przez sąsiednie rozwiązanie bazowe $\begin{bmatrix} \mathbf{x}'' \\ \mathbf{y}'' \end{bmatrix}_{B''}$ związane z bazą B'' . Niech dalej baza B'' powstaje z bazy B' przez wymianę jednego wektora, przy czym

na miejsce wektora "opuszczającego" bazę wchodzi do bazy B'' wektor $\mathbf{p}_j \notin B'$.

4.33 tw. Jeżeli $\begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}_{B'}$ i $\begin{bmatrix} \mathbf{x}'' \\ \mathbf{y}'' \end{bmatrix}_{B''}$ są sąsiednimi rozwiązaniami bazowymi określającymi kolejne wierzchołki $\mathbf{x}'_*$ i $\mathbf{x}''_*$ w zbiorze $\mathcal{X}$, to zmiana wartości funkcji liniowej (4.29) przy przejściu z wierzchołka $\mathbf{x}'_*$ do wierzchołka $\mathbf{x}''_*$ wynosi:

$$\Delta f = f(\mathbf{x}''_*) - f(\mathbf{x}'_*) = -\Theta_j(z_j - c_j) \quad (4.32)$$

gdzie:

$\Theta_j > 0$ jest wartością zmiennej związanej z wektorem $\mathbf{p}_j$ w bazie B'' ;

c_j - współczynnik liniowej funkcji $\tilde{f}$ przy zmiennej (niewiadomej) związanej z wektorem $\mathbf{p}_j$

z_j - suma, której składnikami są iloczyny elementów tworzących kolumnę $\mathbf{c}^B$ (współczynniki funkcji liniowej przy niewiadomych bazowych) przez odpowiednie współrzędne wektora $\mathbf{p}_j$ w bazie B' .

W zapisie wektorowym z_j można przedstawić:

$$z_j = (\mathbf{c}^{B'})^T \alpha_j^{B'} \quad (4.33)$$

gdzie $\alpha_j^{B'}$ jest wektorem współrzędnych wektora $\mathbf{p}_j$ w bazie B' .

Zatem we wzorze (4.32) znak Δf zależy tylko od różnicy $z_j - c_j$: gdzie c_j - jest dane, a z_j - łatwo można obliczyć na podstawie wzoru (4.33) (czynnik Θ_j przyjmujący wartość dodatnią nie ma wpływu na znak Δf).

Jeżeli zatem, we wzorze (4.32) dla każdego wektora $p_j \in B'$ zachodzi $\Delta_j = z_j - c_j > 0$ to $\Delta f < 0$ i oznacza to **spadek wartości funkcji przy przejściu od wierzchołka x_w' do x_w'' w zbiorze X** . Jeżeli natomiast dla każdego $p_j \in B'$ zachodzi $\Delta_j = z_j - c_j < 0$ to $\Delta f > 0$ i oznacza to przyrost wartości funkcji przy przejściu od wierzchołka x_w' do x_w'' w zbiorze X .

Oczywiście $\Delta f < 0$ jest korzystne wówczas gdy na zbiorze X wyznaczamy wartość najmniejszą, natomiast nie jest korzystne przy wyznaczaniu wartości największej funkcji i na odwrót, $\Delta f > 0$ określa korzystną sytuację, gdy interesuje nas wartość największa funkcji na zbiorze X , niekorzystną - gdy poszukujemy wartości najmniejszej tej funkcji w zbiorze X . A ponieważ, znak Δf zależy tylko od czynnika $\Delta_j = z_j - c_j$, to dlatego nazywamy go **wskaźnikiem optymalności**.

4.33. wn. Jeżeli $p_j \in B'$ to w tablicy simpleks zawierającej rozwiązanie bazowe wyznaczone przez bazę B' mamy, że

$$\Delta_j = z_j - c_j = 0. \quad (4.34)$$

Oznacza to, że **wskaźniki optymalności wektorów bazowych (albo niewiadomych bazowych) są zawsze wszystkie równe zero**.

4.34. wn. Jeżeli dla pewnego rozwiązania bazowego wszystkie wskaźniki optymalności spełniają warunek

$$\forall_j \Delta_j = z_j - c_j \geq 0 \quad (4.35)$$

to funkcja liniowa w wierzchołku wyznaczonym przez to rozwiązanie bazowe osiąga swoją **skończoną wartość największą** na zbiorze X .

4.35. wn. Jeżeli dla pewnego rozwiązania bazowego wszystkie wskaźniki optymalności spełniają warunek

$$\forall_j \Delta_j = z_j - c_j \leq 0 \quad (4.36)$$

to funkcja liniowa w wierzchołku wyznaczonym przez to rozwiązanie bazowe osiąga swoją **skończoną wartość najmniejszą** na zbiorze X .

Tak więc wzory (4.35) oraz (4.36) określają tzw. **kryterium optymalności** rozwiązania bazowego, a mówiąc inaczej, pozwalają stwierdzić kiedy postępowanie numeryczne w algorytmie simpleks zostaje zakończone.

4. Budowa nowego, poprawionego rozwiązania bazowego

Jeżeli rozwiązanie bazowe nie spełnia warunków określonych przez wzory (4.35) lub (4.36) tzn. wśród wektorów niebazowych istnieją wektory p_j dla których $\Delta_j = z_j - c_j < 0$ (albo $\Delta_j = z_j - c_j > 0$) to oznacza, że badana funkcja liniowa f nie osiągnęła jeszcze na zbiorze X swej wartości największej (najmniejszej). Wówczas postępowanie numeryczne w algorytmie simpleks należy kontynuować i poszukiwać nowego poprawionego rozwiązania bazowego, poprzez jednokrotną wymianę wektora w bazie.

Aby jednak zagwarantować nie gorszą wartość funkcji f niż w wierzchołku już wyznaczonym, trzeba zaproponować pewien racjonalny sposób wyboru wektora do nowej bazy.

Kryterium wyboru wektora do nowej bazy jest następujące:

przy wyznaczeniu wartości **największej funkcji liniowej f** na zbiorze X

- do nowej bazy B'' wchodzi wektor p_k , którego wskaźnik optymalności spełnia warunek:

$$\Delta_k = z_k - c_k = \min_{\Delta_j < 0} (z_j - c_j); \quad (4.37)$$

zaś przy wyznaczaniu wartości najmniejszej funkcji liniowej f na zbiorze X .

- do nowej bazy B'' wchodzi wektor p_k , którego wskaźnik optymalności spełnia warunek:

$$\Delta_k = z_k - c_k = \max_{\Delta_j > 0} (z_j - c_j). \quad (4.38)$$

Kryterium, określające wektor, który opuszcza bazę B' pozostaje takie samo jak stosowane dotychczas, bowiem wyznaczamy zawsze rozwiązania bazowe o nieujemnych składowych.

Jeżeli natomiast istnieją $\Delta_k < 0$ ($\Delta_k > 0$), co świadczy o konieczności kontynuowania postępowania numerycznego, ale każdy wektor z takim wskaźnikiem optymalności ma niedodatnie współrzędne w aktualnej bazie, to oznacza że zbiór X jest nieograniczony i funkcja f na tym zbiorze nie osiąga swej skończonej wartości największej (najmniejszej).

Szczegóły postępowania numerycznego w algorytmie simpleks wyjaśnimy dalej na przykładach.

4.34 prz. Wyznaczyć wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji liniowej $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$ na zbiorze

$$X = \{x: x \in R^2 \wedge x \geq 0 \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}.$$

Zapiszmy X jako zbiór rozwiązań układu nierówności liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0. \end{cases}$$

oraz zbudujmy dla tego zadania model simpleks zgodne z omówionymi zasadami.

I tak model simpleks ma tu postać:
wyznaczyć wartość największą funkcji

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 3x_1 - x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$$

przy warunkach na zmienne:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 8 \\ -x_1 + x_2 + y_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + y_3 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Startowe rozwiązanie bazowe określają wektory przy niewiadomych y_1, y_2, y_3 więc: $x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 8, y_2 = 1, y_3 = 2$ i wyznaczają one wierzchołek $x_1^* = [0 \ 0]^T$.

Zapiszmy to rozwiązanie i wszystkie następne w tabeli simpleks (por. tablica 12).

Tablica 12

Nr rozwiąz.	c^B	Baza	Niewiadome bazowe	3					0					Wartości niewiadomych bazowych	Wartość kryterium
				x_1 p_1	x_2 p_2	y_1 p_3	y_2 p_4	y_3 p_5	x_1 p_1	x_2 p_2	y_1 p_3	y_2 p_4	y_3 p_5		
1	0	p_3	y_1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	8	8:1=8
	0	p_4	y_2	-1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	-
	0	p_5	y_3	1	-2	0	0	1	0	0	0	0	1	2	2:1=2*
$\Delta_j = z_j - c_j$															
2	0	p_3	y_1	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	p_4	y_2	0	-1	0	1	1	0	-1	0	1	1	6	6:3=2
	3	p_1	x_1	1	-2	0	0	1	0	0	0	0	1	3	-
$\Delta_j = z_j - c_j$															
3	-1	p_2	x_2	0	-5	0	0	3	0	0	0	0	3	6	-
	0	p_4	y_2	0	1	1/3	0	-1/3	0	1	1/3	0	-1/3	2	-
	3	p_1	y_3	1	0	2/3	0	1/3	1	0	2/3	0	1/3	5	-
$\Delta_j = z_j - c_j$															
				0	0	5/3	0	2/3	0	0	5/3	0	2/3	16	-

Komentarz do rozwiązań bazowych zawartych w tablicy 12. W wierszu "zerowym" główki tablicy umieszczamy współczynniki linowej funkcji z modelu sympleks. W kolumnie c^B pierwszego rozwiązania bazowego wpisujemy wektor $[0 \ 0 \ 0]^T$, bowiem niewiadome bazowe mają równe zero współczynniki w funkcji $\tilde{f}$. Wskaźniki optymalności dla pierwszego rozwiązania bazowego obliczymy następująco:

$$z_1 = (c^B)^T p_1 = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \text{ stąd } \Delta_1 = z_1 - c_1 = -3;$$

$$z_2 = (c^B)^T p_2 = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0, \text{ stąd } \Delta_2 = z_2 - c_2 = 1$$

$\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$ jako wskaźniki optymalności niewiadomych (wektorów) bazowych.

Wartość funkcji w wierzchołku x_1^* i następnych obliczamy ze

$$\text{wzoru } f(x_1^*) = c^T x_1^* \text{ więc } f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = [3 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Ponieważ istnieje $\Delta_k = \Delta_1 < 0$ to:

- rozwiązanie bazowe (1) nie wyznacza w zbiorze X wierzchołka, gdzie funkcje osiąga swą wartość największą;
- budujemy więc następne rozwiązanie bazowe, wprowadzając do nowej bazy wektor p_1 .

W drugim rozwiązaniu bazowym wektor $c^B = [0 \ 0 \ 3]^T$, zaś wskaźniki optymalności dla niewiadomych niebazowych wynoszą:

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = (\mathbf{c}^B)^T \alpha_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - (-1) = -5,$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = (\mathbf{c}^B)^T \alpha_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 3.$$

Rozwiązanie to wyznacza wierzchołek $\mathbf{x}_2^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, więc

$$f(\mathbf{x}_2^*) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 6.$$

Ponieważ istnieje $\Delta_k = \Delta_2 < 0$, więc nie możemy zakończyć postępowania w algorytmie simpleks. Budujemy trzecie rozwiązanie bazowe wprowadzające do bazy wektor $\mathbf{p}_2$, jedyny z ujemnym wskaźnikiem optymalności, na miejsce wektora $\mathbf{p}_3$, a $\mathbf{c}^B = [-1 \ 0 \ 3]^T$.

Dla trzeciego rozwiązania bazowego wszystkie wskaźniki optymalności $\Delta_j \geq 0$, kończymy więc postępowanie i wnioskujemy, że

w wierzchołku $\mathbf{x}_3^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ funkcja liniowa $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$

osiąga w zbiorze X swą wartość największą równą 16. Mówiąc inaczej funkcja liniowa $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$ osiąga swą wartość największą równą 16 w punkcie zbioru X o współrzędnych $x_1 = 6, x_2 = 2$.

Rozwiązujemy teraz drugą część zadania, to znaczy na tym samym zbiorze X wyznaczamy jeszcze wartość najmniejszą funkcji $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$. Postępowanie numeryczne jest w tym przypadku podobne - identyczny jest model simpleks, identyczne jest rozwiązanie startowe. Natomiast **zmieni się kryterium oceny**

optymalności rozwiązania oraz kryterium wyboru wektora wchodzącego do bazy.

Tabela simpleks wraz z rozwiązaniem startowym jest identyczna jak w poprzedniej części zadania, natomiast dalsze rozwiązania bazowe oczywiście muszą być inne. Zapiszmy wszystkie interesujące nas rozwiązania w tablicy 13.

Komentarz do rozwiązań zawartych w tablicy 13.

Wskaźniki optymalności dla pierwszego rozwiązania bazowego przyjmują różne wartości, a ponieważ istnieje $\Delta_k = \Delta_2 > 0$ to znaczy, że kontynuujemy postępowanie obliczeniowe.

Drugie rozwiązanie bazowe wyznacza już wierzchołek $\mathbf{x}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

w którym funkcja liniowa $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$ osiąga swą wartość najmniejszą w zbiorze X równą (-1), ponieważ

$$f(\mathbf{x}_2^*) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.$$

Zauważmy, że w tym przypadku, w przeglądzie kontrolowanym uczestniczyły tylko dwa wierzchołki zbioru X . Czytelnik łatwo może narysować w R^2 zbiór X i prześledzić w obu przypadkach, które wierzchołki zbioru X przeglądaliśmy. Na koniec jeszcze uwaga dotycząca obliczania wskaźników optymalności Δ_j . **Ponieważ $\Delta_j = 0$ dla niewiadomej bazowej, to wskaźniki te można obliczyć również przy pomocy przekształceń elementarnych wykonywanych i na ostatnim wierszu tabeli simpleks.**

Tablica 13

Nr rozwiąz.	c^B	Baza	Niewiad. bazowe	3 -1 0 0 0					Wartości niewiadomych bazowych	Wartość kryterium
				x_1 p_1	x_2 p_2	y_1 p_3	y_2 p_4	y_3 p_5		
1	0 0 0	p_3 p_4 p_5	y_1 y_2 y_3	1 -1 1	1 1 -2	1 0 0	0 1 0	0 0 1	8 1 2	8:1=8 1:1=1*
$\Delta_j = z_j - c_j$				-3	1	0	0	0	0	
2	0 -1 3	p_3 p_2 p_5	y_1 x_2 y_3	2 -1 -1	0 1 0	1 0 0	-1 1 2	0 0 1	0 7 1	
$\Delta_j = z_j - c_j$				-2	0	0	-1	0	-1	

4.34. prz. Wyznaczyć wartość największą funkcji

$$f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$$

na zbiorze X rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Z uwagi na to, że nierówność pierwsza jest typu " $\geq$ " w układzie równań, z którego będziemy wyznaczać startowe rozwiązanie bazowe musi pojawić się niewiadoma sztuczna t_1 . Wobec tego model simpleks dla tego zadania ma postać: wyznaczyć wartość największą funkcji

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, t_1) = -x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 - Mt_1,$$

przy warunkach na zmienne:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1 + t_1 = 4 \\ -x_1 + x_2 + y_2 = 2 \\ x_1 + y_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, t_1 = 0. \end{cases}$$

Startowe rozwiązanie bazowe wyznaczają wektory przy niewiadomych t_1, y_2, y_3 , i ma ono postać:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 3, t_1 = 4$$

oraz określa wierzchołek $x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin X$, co potwierdza wartość funkcji dla tego rozwiązania, bowiem

$$f(x_1^*) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq \tilde{f}[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 4]^T = -4M.$$

Dopóki więc wśród niewiadomych bazowych występuje zmienna $t_1 \neq 0$, wartość funkcji będzie zależeć od M i nie będzie spełniony warunek (4.31)

Startowe rozwiązanie bazowe wraz z jego oceną i wszystkie następne przeglądane rozwiązania bazowe, zawiera tablica 14.

Skomentujemy wyniki zawarte w tablicy 14.

Dwa pierwsze rozwiązania bazowe zawierają niewiadomą sztuczną $t_1 \neq 0$ więc wyznaczone wierzchołki $x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $x_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

nie należą do zbioru X , a wartość funkcji $\tilde{f}$ w obu przypadkach zależy od M i nie spełnia warunku (4.31).

Dopiero trzecie i czwarte rozwiązanie bazowe spełniają warunek (4.31) i wyznaczają wierzchołki należące do zbioru X . Wartość największa równą 7 badana funkcja osiąga w wierzchołku

$$x_4^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in X \text{ ponieważ } f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = [-1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 7.$$

Tablica 14.

Nr rozwiąz.	c^B	Baza	Niewiad. bazowe							Wartości niewiadomych bazowych	Wartość kryterium
				-1	2	0	0	0	-M		
1	$-M$ 0 0	P_6 P_4 P_5	t_1 y_2 y_3	x_1 P_1	x_2 P_2	y_1 P_3	y_2 P_4	y_3 P_5	t_1 P_6	4 2 3	4:1+4 2:1=2* -
				1 -1 1	1 1 0	-1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 0 0		
				-M+1 -M-2		M	0	0	0	-4M	
				$\Delta_j = z_j - c_j$							
2	$-M$ 2 0	P_6 P_2 P_5	t_1 x_2 y_3	x_1 P_1	x_2 P_2	y_1 P_3	y_2 P_4	y_3 P_5	t_1 P_6	4 2 3	4:2=2* - 3:1=3
				2 -1 1	0 1 0	-1 0 0	-1 1 0	0 0 1	1 0 0		
				-M+1 -M-2		M	0	0	0	-4M	
				$\Delta_j = z_j - c_j$							

Tablica 14 cd.

Nr rozwiąz.	c^B	Baza	Niewiad. bazowe	-1 2 0 0 0 -M						Wartości niewiadomych bazowych	Wartość kryterium
				x_1 P_1	x_2 P_2	y_1 P_3	y_2 P_4	y_3 P_5	t_1 P_6		
3	-1	P_1	x_1	1	0	-1/2	-1/2	0		1	-
	2	P_2	x_2	0	1	-1/2	1/2	0		3	-
	0	P_5	y_3	0	0	1/2	1/2	1		2	*
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	-1/2	3/2	0		5	
4	-1	P_1	x_1	1	0	0	0	1		3	-
	2	P_2	x_2	0	1	0	1	1		5	-
	0	P_3	y_1	0	0	1	1	2		4	
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	0	2	1		7	

4.35. prz. Zbudować model simpleks dla zadania 4.34 prz, gdy należy wyznaczyć wartość najmniejszą funkcji

$$f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2.$$

Ponieważ w równoważnym układzie równań występuje zmienna sztuczna t_1 , to w tym przypadku współczynnik przy tej zmiennej w funkcji $\tilde{f}$ wynosi $+M$. Model simpleks dla tego zadania ma więc postać:

wyznaczyć wartość najmniejszą funkcji

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, t_1) = -x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + Mt_1$$

przy warunkach na zmienne jak w przykładzie 4.34.

Pozostawiamy czytelnikowi wykonanie obliczeń i sprawdzenie, że funkcja $f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$ osiąga swą wartość najmniejszą równą -1 w wierzchołku $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ zbioru X .

Na koniec omówimy jeszcze dwa przykłady, w których analizujemy sytuacje gdy funkcja swą wartość największą (najmniejszą) osiąga w więcej niż jednym punkcie zbioru X albo nie osiąga skończonej wartości największej (najmniejszej) na zbiorze X .

4.35. prz. Wyznaczyć wartość największą funkcji

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2$$

na zbiorze

$$X = \{x: x \in R^2 \wedge x \geq 0 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}\}.$$

Model simpleks tego zadania:
- wyznaczyć wartość największą funkcji

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) = 4x_1 + 6x_2 + 0y_1 + 0y_2$$

przy warunkach na zmienne:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + y_1 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + y_2 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Startowe rozwiązanie bazowe:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 6, y_2 = 1 \text{ określa wierzchołek } \mathbf{x}_1^w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie to i wszystkie następne zapisujemy w tablicy 16. Zauważmy, że w rozwiązaniu bazowym 3 (por. tablica 16) wskaźnik optymalności dla niebazowego wektora $\mathbf{p}_4$ jest równy zero. Znaczą to, że można zbudować następne rozwiązanie bazowe, które zagwarantuje taką samą wartość funkcji f . Mamy zatem dwa

wierzchołki zbioru $\mathcal{X}$ $\mathbf{x}_3^w = \begin{bmatrix} 6/7 \\ 10/7 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_4^w = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ w których funkcja

linowa $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2$ przyjmie tę samą wartość równą 12. Co więcej, we wszystkich punktach leżących na odcinku o końcach $\mathbf{x}_3^w, \mathbf{x}_4^w$ funkcja $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2$ przyjmie wartość 12. Oznacza to, że w tym przypadku rozwiązaniem problemu jest każdy punkt odcinka wyznaczonego przez wektor $\mathbf{x}_3^w, \mathbf{x}_4^w$, czyli

$$\text{odc}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in R^2 \wedge \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 6/7 \\ 10/7 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \alpha \in (0,1) \}.$$

Czytelnik łatwo może sporządzić ilustrację graficzną tego zadania w R^2 .

Tablica 15

Nr rozwiąz.	CB	Baza	Niewiad. bazowe	x_1 $\mathbf{p}_1$	x_2 $\mathbf{p}_2$	y_1 $\mathbf{p}_3$	y_2 $\mathbf{p}_4$	Wartości niewiadomych bazowych	Wartości kryterium
1	0 0	$\mathbf{p}_3$ $\mathbf{p}_4$	y_1 y_2	2 -1	<u>3</u> 2	1 0	0 1	6 2	6:3=2 2:2=1 *
2	0 6	$\mathbf{p}_3$ $\mathbf{p}_2$	y_1 x_2	<u>7/2</u> -1/2	0 1	1 0	-3/2 1/2	3 1	*
3	4 6	$\mathbf{p}_1$ $\mathbf{p}_2$	x_1 x_2	1 0	0 1	2/7 1/7	<u>-3/7</u> 2/7	6/7 10/7	- *
4	4 0	$\mathbf{p}_1$ $\mathbf{p}_4$	x_1 y_4	1 0	3/2 7/2	1/2 1/2	0 1	12 3 5	
				0 0	0 0	2 2	0 0	12	

4.38. prz. Wyznaczyć wartość największą funkcji

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$$

na zbiorze

$$X = \{x: x \in R^2 \wedge x \geq 0 \wedge \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}.$$

Zapiszmy model simpleks dla tego zadania - wyznaczyć wartość największą funkcji liniowej

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2x_1 - x_2 + 0y_1 + 0y_2,$$

przy warunkach na zmienne:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + y_1 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + y_2 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Startowe rozwiązanie bazowe wyznaczają wektory przy niewiadomych y_1, y_2 , więc $x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2$. Określa ono wierzchołek $x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, zaś $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$.

Rozwiązanie startowe, oraz następne rozwiązania bazowe, wraz ze wskaźnikami optymalności zapisujemy w tablicy simpleks (por. tablica 16).

Tablica 16

Nr rozwiąz.	CB	Baza	Niewiad. bazowe	x_1	x_2	y_1	y_2	Wartości niewiadomych bazowych	Wartości kryterium
1	0	p_3	y_1	-1	1	1	0	1	-
	0	p_4	y_2	1	-2	0	1	2	2:1=2 *
			$\Delta_j = z_j - c_j$	-2	1	0	0	0	
2	0	p_3	y_1	0	-1	1	1	3	-
	2	p_1	x_1	1	-2	0	1	1	-
			$\Delta_j = z_j - c_j$	0	-3	0	2	4	

Otrzymany w tablicy 16 wynik wymaga komentarza - drugie rozwiązanie bazowe określa wierzchołek $\mathbf{x}_2^w = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, zaś $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 4$.

Nie jest to jednak wierzchołek, w którym funkcja przyjmuje wartość największą, świadczy o tym ujemny wskaźnik $\Delta_2 = -3$ dla wektora $\mathbf{p}_2$.

Znaczący to, że z wektorem $\mathbf{p}_2$ można utworzyć nowe rozwiązanie bazowe, które dawałoby większą wartość funkcji niż 4.

Z drugiej strony, wektor $\mathbf{p}_2$ w tej bazie nie posiada ani jednej dodatniej współrzędnej, a to świadczy o tym, że zbiór $\mathcal{X}$ jest nieograniczony. Wniosek z tych dwóch faktów jest następujący: funkcje liniowa $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$ na zbiorze $\mathcal{X}$ nie osiąga skończonej wartości największej, bowiem dla każdego

wektora $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$ można wskazać inny wektor $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$

w którym funkcja osiągnie większą wartość co można zapisać:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \exists \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X} f(\bar{\mathbf{x}}) > f(\mathbf{x}).$$

Uogólniając powyższy fakt stwierdzamy, że liniowa funkcja $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ nie osiąga na zbiorze $\mathcal{X}$ skończonej wartości największej (najmniejszej), jeżeli analiza wskaźników optymalności Δ_j wskazuje, że rozwiązanie można jeszcze poprawić, ale nie uda się skonstruować następnego rozwiązania bazowego, ponieważ wszystkie współrzędne w aktualnej bazie, tego wektora który winien wejść do nowej bazy, są niedodatnie.

PYTANIA KONTROLNE

1. Czy algorytm simpleks można stosować:
 - a) do funkcji liniowej określonej na dowolnym zbiorze wypukłym $\mathcal{X}$?
 - b) do funkcji nieliniowej określonej na wielościanie wypukłym?
2. Czy funkcja liniowa może osiągnąć swą wartość największą (najmniejszą) w punktach wewnętrznych zbioru $\mathcal{X}$?
3. Omówić zasady budowy modelu simpleks oraz tablicy simpleks.
4. Omówić zasady budowy funkcji $\tilde{f}$ i zapisać ją używając notacji macierzowej. Wyjaśnić kiedy $\tilde{f} = f$.
5. Sformułować kryterium pozwalające stwierdzić, że funkcja liniowa osiąga:
 - a) skończoną wartość największą w wierzchołku zbioru $\mathcal{X}$;
 - b) skończoną wartość najmniejszą w wierzchołku zbioru $\mathcal{X}$.
6. Jakie są konsekwencje występowania niewiadomych sztucznych w modelu simpleks?
7. W jaki sposób stosując algorytm simpleks stwierdzamy, że:
 - a) funkcja liniowa nie osiąga skończonej wartości największej (najmniejszej) na zbiorze $\mathcal{X}$?
 - b) funkcja liniowa osiąga swą wartość największą (najmniejszą) w więcej niż jednym punkcie zbioru $\mathcal{X}$?