Rozdział I

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych.

1. Przykłady funkcji wielu zmiennych.

W skrypcie będziemy rozważać funkcje dwóch i trzech, a czasami również większej ilości zmiennych. Zaczniemy od podania przykładów takich funkcji.

I. Objętość V prostopadłościanu o krawędziach długości $a,\ b,\ c$ wyraża się wzorem

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

jest więc funkcją trzech zmiennych $a,\ b,\ c$.

II. Objętość W walca kołowego o promieniu podstawy r i wysokości h wynosi

$$W = \pi\, r^2\, h,$$

jest więc funkcją dwóch zmiennych $r,\ h$.

III. Wielkość siły F, z jaką oddziaływują na siebie w próżni ładunki elektryczne $e_1,\ e_2$ umieszczone w odległości r, zgodnie z prawem Coulomba wyraża się wzorem

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

zatem F jest funkcją trzech zmiennych $e_1,\ e_2,\ r$.

IV. Temperatura T w pomieszczeniu, w którym włączono grzejnik, zmienia się w czasie, ponadto zależy od punktu, w którym ją mierzymy. Zatem T jest funkcją czterech zmiennych x, y, z, t, jeżeli przez x, y, z oznaczamy współrzędne prostokątne punktu zaś t oznacza czas liczony od pewnej chwili początkowej (np. od chwili włączenia grzejnika). Zapisujemy

$$T = T(x, y, z, t).$$

V. Jeżeli firma produkuje dwa wyroby o cenach P_1, P_2, przy czym ilość wyrobu wyprodukowanego w jednostce czasu wynosi Q_1, Q_2 odpowiednio, to przychód firmy w tej samej jednostce czasu wynosi

$$R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2.$$

Koszt C produkcji zależy na ogół od ilości produkowanych wyrobów (w przypadku produkcji nastawionej na duże ilości zazwyczaj udaje się go zmniejszyć), zatem jest funkcją dwóch zmiennych

$$C = C(Q_1, Q_2).$$

Zysk Π uzyskany przez firmę w jednostce czasu wynosi

$$\Pi = R - C,$$

jest więc funkcją czterech zmiennych P_1, P_2, Q_1, Q_2.

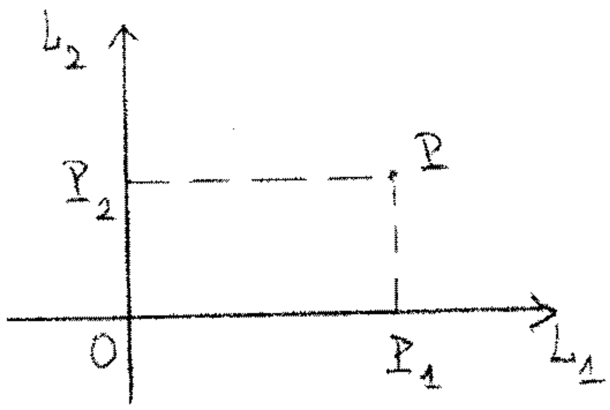
2. Układ współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie i w przestrzeni.

Wprowadzając oś liczbową L (tj. prostą zorientowaną, na której został obrany początek układu O i jednostka długości) uzyskujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami prostej L a liczbami rzeczywistymi. Liczbę rzeczywistą x odpowiadającą punktowi $P \in L$ nazywamy jego współrzędną na osi liczbowej x. W dalszym ciągu zbiór wszystkich liczb rzeczywistych będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{R}$, zaś zbiór wszystkich liczb naturalnych symbolem $\mathbb{N}$.

Jeżeli na płaszczyźnie wprowadzimy dwie prostopadłe osie liczbowe L_1, L_2 przecinające się w początku układu, to każdy punkt P płaszczyzny jest jednoznacznie określony przez swoje rzuty prostopadłe P_1, P_2 odpowiednio na osie L_1, L_2, zaś rzutom tym odpowiadają jednoznacznie ich współrzędne x na osi L_1 oraz y na osi L_2. Uzyskujemy w ten sposób wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami płaszczyzny a parami liczb rzeczywistych. Mówimy, że na płaszczyźnie został wprowadzony *układ współrzędnych prostokątnych* (używany jest również termin *prostokątny układ współrzędnych*). Liczbę x nazywamy *odciętą punktu P*, liczbę y - *rzędną punktu P*, zapisujemy

$$P = (x, y) \qquad \text{lub} \qquad P(x, y).$$

Zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych (x, y) będziemy oznaczali symbolem $\mathbb{R}^2$. Możemy go interpretować geometrycznie jako płaszczyznę z wprowadzonym układem współrzędnych prostokątnych.



[rys. 1]

W podobny sposób wprowadzamy układ współrzędnych prostokątnych w przestrzeni. Wprowadzając trzy prostopadłe osie liczbowe L_1, L_2, L_3 przecinające się w początku układu, możemy każdemu punktowi P przyporządkować wzajemnie jednoznacznie jego rzuty prostopadłe P_1, P_2, P_3 odpowiednio na osie L_1, L_2, L_3. Oznaczając przez x współrzędną punktu P_1 na osi L_1, przez y współrzędną punktu P_2 na osi L_2, przez z współrzędną punktu P_3 na osi L_3 uzyskujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami przestrzeni a trójkami liczb rzeczywistych. Mówimy, że w przestrzeni został wprowadzony *układ współrzędnych prostokątnych* (lub inaczej *prostokątny układ współrzędnych*), zapisujemy

$$P = (x, y, z) \qquad \text{lub} \qquad P(x, y, z).$$

Zbiór wszystkich trójek liczb rzeczywistych (x, y, z) będziemy oznaczali symbolem $\mathbb{R}^3$. Możemy go interpretować geometrycznie jako przestrzeń z wprowadzonym układem współrzędnych prostokątmych.

Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określamy działania dodawania i mnożenia punktów przez liczbę rzeczywistą przyjmując

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

oraz

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \qquad \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mówimy, że na zbiorze $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{R}$ została określona funkcja f, jeżeli każdej liczbie $x \in \mathbb{D}_1$ została przyporządkowana dokładnie jedna liczba $y \in \mathbb{R}$. Zapisujemy

$$y = f(x),$$

oczywiście f jest funkcją jednej zmiennej a wartościami jej są liczby rzeczywiste. *Wykresem funkcji* f nazywamy zbiór punktów (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ takich, że $x \in \mathbb{D}_1$ oraz $y = f(x)$. W przypadku funkcji f ciągłej jest to pewna krzywa na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

Podobnie mówimy, że na zbiorze $\mathbb{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$ została określona funkcja f, jeżeli każdej parze liczb rzeczywistych $(x, y) \in \mathbb{D}_2$ została przyporządkowana dokładnie jedna liczba $z \in \mathbb{R}$. Zapisujemy

$$z = f(x, y),$$

f jest funkcją dwóch zmiennych o wartościach rzeczywistych. *Wykresem funkcji* f nazywamy zbiór punktów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takich, że $(x, y) \in \mathbb{D}_2$ oraz $z = f(x, y)$. W przypadku funkcji dwóch zmiennych o wartościach nieujemnych jej wykres jest powierzchnią rozpiętą nad zbiorem $\mathbb{D}_2$ (przy założeniu, że oś liczbowa L_3 czyli oś z-ów jest zorientowana ku górze).

Jeżeli każdemu układowi trzech liczb rzeczywistych $(x, y, z) \in \mathbb{D}_3 \subset \mathbb{R}^3$ została przyporządkowana dokładnie jedna liczba $w \in \mathbb{R}$, to mówimy, że na zbiorze $\mathbb{D}_3$ została określona funkcja f. Zapisujemy

$$w = f(x, y, z),$$

f jest funkcją rzeczywistą trzech zmiennych. Wykresem tej funkcji jest zbiór układów czterech liczb (x, y, z, w) takich, że $(x, y, z) \in \mathbb{D}_3$ oraz $w = f(x, y, z)$. Wykres taki można uważać za podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określonej jako zbiór wszystkich układów (x, y, z, w) czterech liczb rzeczywistych, przestrzeń taka nie jest jednak dostępna naszej wyobraźni przestrzennej.

Zbiór, na którym określona jest funkcja f, nazywamy *dziedziną* funkcji f.

Przykład 1. Funkcja

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{xy}$$

jest określona w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ za wyjątkiem osi współrzędnych, na których mianownik ułamka znika. Jej dziedziną jest zatem zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus (L_x \cup L_y)$, jeżeli przez L_x, L_y oznaczymy oś x-ów i oś y-ów.

Przykład 2. Niech

$$h(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x + y)^{2n}}{1 + (x + y)^{2n}}.$$

Oznaczając $t = (x + y)^2$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{1 + t^n} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad t > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{gdy} \quad t = 1, \\ 0 & \text{gdy} \quad 0 \le t < 1, \end{cases}$$

zatem

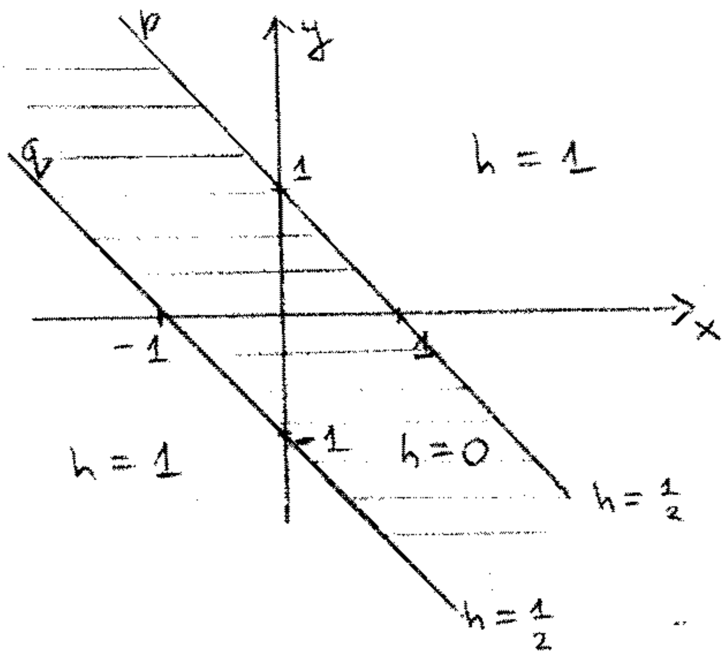
$$h(x, y) = \frac{1}{2}$$

na prostej p o równaniu $y = 1 - x$ oraz na prostej q o równaniu $y = -1 - x$. W części płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ określonej nierównością $-1-x < y < 1-x$ (czyli w pasie między prostymi p i q) mamy

$$h(x, y) = 0,$$

natomiast dla $y > 1 - x$ (czyli nad prostą p) oraz dla $y < -1 - x$ (czyli pod prostą q) zachodzi równość

$$h(x, y) = 1.$$



[rys. 2]

Przykład 3. Funkcja trzech zmiennych

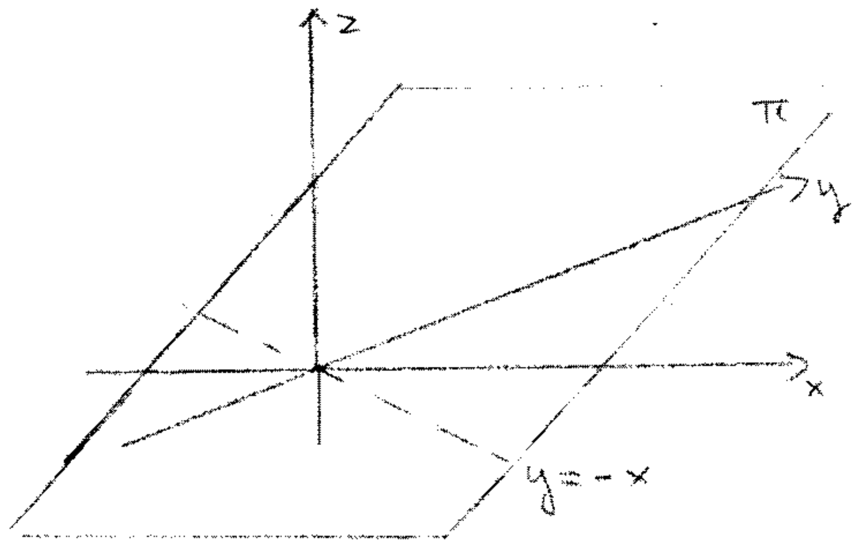
$$f(x,y,z) = \frac{\sin z}{x^2+y^2+z^2}$$

jest określona w całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ za wyjątkiem początku układu współrzędnych, w którym znika mianownik ułamka, dziedziną jej jest więc zbiór $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Na każdej płaszczyźnie $z = k\pi$, $k \neq 0$ całkowite oraz na płaszczyźnie $z = 0$, z której usunięto początek układu współrzędnych, funkcja f znika, w pozostałych punktach swojej dziedziny ma wartości różne od zera.

Przykład 4. Niech

$$g(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}.$$

Funkcja g jest określona dla $x+y+z \geq 0$, jej dziedziną jest więc zbiór punktów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ leżących w płaszczyźnie Π o równaniu $x+y+z=0$ lub nad tą płaszczyzną (rys. 3).



[rys. 3]

Uwaga. Niekiedy wygodnie jest oznaczać punkt jedną literą przyjmując

$$p = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{lub} \qquad q = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Dla wartości funkcji w tym punkcie będziemy używali zapisu

$$f(a, b) = f(p) \qquad \text{względnie} \qquad h(a, b, c) = h(q).$$

3. Granica ciągu punktów.

Niech $\{(x_n, y_n)\}$ będzie ciągiem punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny do punktu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, jeżeli

(1) $$x_n \to a \qquad \text{oraz} \qquad y_n \to b.$$

Zapisujemy

$$(x_n, y_n) \to (a, b) \qquad \text{lub} \qquad \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

Przez *normę* punktu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rozumiemy wyrażenie

(2) $$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika łatwo, że norma punktu jest równa jego odległości od początku układu, zaś odległość punktów $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem

$$d(P_1, P_2) = |P_1 - P_2|$$

czyli

(3) $$d(P_1, P_2) = |(x_1 - y_1, x_2 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

(proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku). Zachodzi łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 1.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a, b)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} |(x_n - a, y_n - b)| = 0.$$

DOWÓD. Jeżeli $(x_n, y_n) \to (a, b)$, to z ciągłości funkcji jednej zmiennej $f(t) = \sqrt{t}$ wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} |(x_n - a, y_n - b)| = 0.$$

Dowód w przeciwną stronę wynika z nierówności

$$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$$

oraz

$$|y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

□

Podobnie określamy zbieżność ciągu punktów i normę w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przyjmujemy, że ciąg punktów $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ jest zbieżny do punktu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, jeżeli

$$x_n \to a, \qquad y_n \to b, \qquad z_n \to c, \tag{4}$$

zapisujemy

$$(x_n, y_n, z_n) \to (a, b, c) \qquad \text{lub} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n, z_n) = (a, b, c).$$

Normę punktu $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ określamy jako

$$|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{5}$$

Jest ona równa odległości punktu (x, y, z) od początku układu. Odległość punktów $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wyraża się jako

$$d(P_1, P_2) = |P_1 - P_2| = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)|$$

czyli

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{6}$$

Podobnie, jak dla punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zachodzi twierdzenie

Twierdzenie 1'.
$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n, z_n) = (a, b, c)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}|(x_n - a, y_n - b, z_n - c)| = 0.$$

DOWÓD. Dowód przebiega podobnie, jak dowód twierdzenia 1 i pozostawiamy go Czytelnikowi. □

4. Granica funkcji.

Znana Czytelnikowi definicja granicy funkcji jednej zmiennej przenosi się bez większych zmian na przypadek funkcji wielu zmiennych. Omówimy to szczegółowo na przykładzie funkcji dwóch zmiennych. Niech f będzie funkcją określoną na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, za wyjątkiem być może punktu (a, b), zaś g liczbą rzeczywistą. Mówimy, że *funkcja f ma granicę g przy $(x, y) \to (a, b)$* lub że *funkcja f ma granicę g w punkcie (a, b)*, jeżeli dla dowolnego ciągu punktów (x_n, y_n) spełniającego warunki

$$(\alpha) \qquad (x_n, y_n) \neq (a, b) \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$(\beta) \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a, b)$$

zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g. \tag{7}$$

Zapisujemy
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = g.$$

Przykład 5. Niech
$$f(x, y) = \sin x + \sin y$$

i niech (a, b) będzie dowolnym punktem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Z ciągłości funkcji sinus wynika, że dla dowolnego ciągu punktów $\{(x_n, y_n)\}$ spełniającego warunki (α), (β) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin a, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin y_n = \sin b,$$

zatem
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \sin a + \sin b,$$

a to oznacza zgodnie z (7), że funkcja f ma granicę w dowolnym punkcie (a, b) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ i przy tym
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \sin a + \sin b.$$

Przykład 6. Niech

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{dla} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

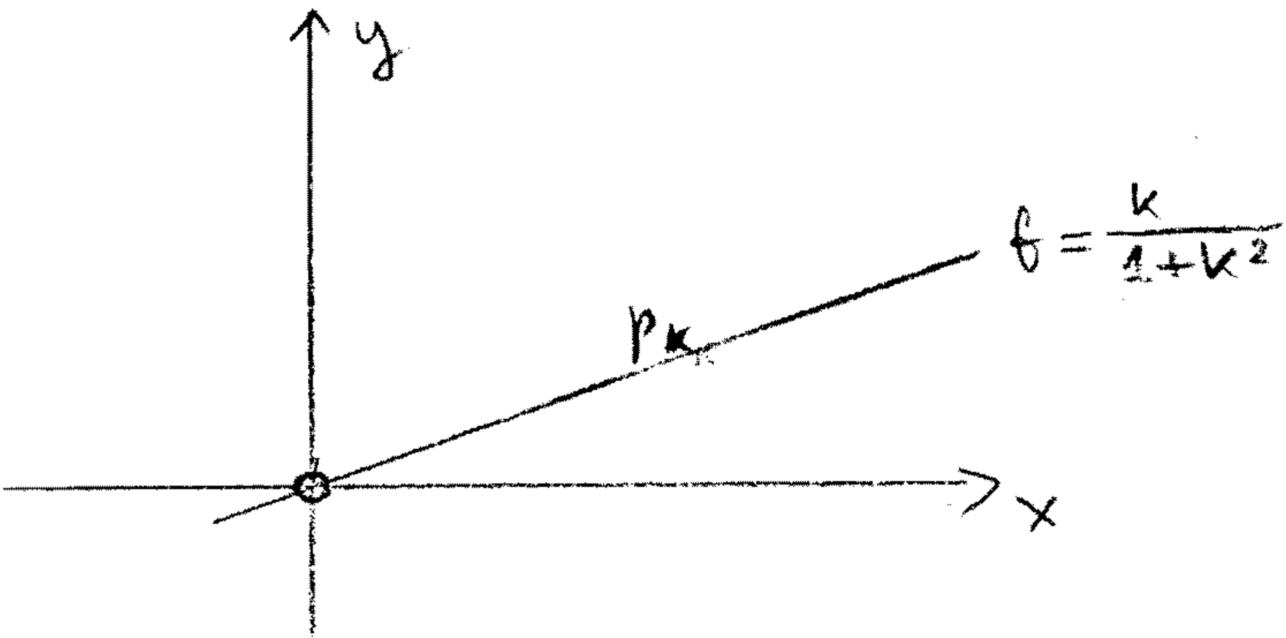
Funkcja f jest określona w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ za wyjątkiem punktu $(0,0)$. Okażemy, że nie ma ona granicy w tym punkcie. Zauważmy, że na każdej prostej p_k o równaniu $y = kx$ (gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą) funkcja f przyjmuje stałą wartość

$$f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2} \tag{8}$$

(por. rys. 4). Z równości (8) wynika, że funkcja f przyjmuje na prostych p_k i p_r tą samą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków

$$k = r \qquad \text{lub} \qquad k = \frac{1}{r}$$

(proste sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi).



[rys.4]

Jeżeli $\{x_n\}$ jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych zbieżnym do 0, przy czym $x_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to ciąg punktów $\{(x_n, kx_n)\}$ spełnia warunki (α), (β) dla $(a,b) = (0,0)$, natomiast zgodnie z (8)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, kx_n) = \frac{k}{1+k^2}.$$

Wynika stąd, że liczba g, o której mowa w warunku (7), nie może być dobrana w sposób uniwersalny dla wszystkich ciągów spełniających warunki (α), (β), bowiem zbliżając się do początku układu po różnych prostych p_k otrzymujemy na ogół różne wartości granicy g w równości (7). Wobec tego funkcja f nie ma granicy w początku układu.

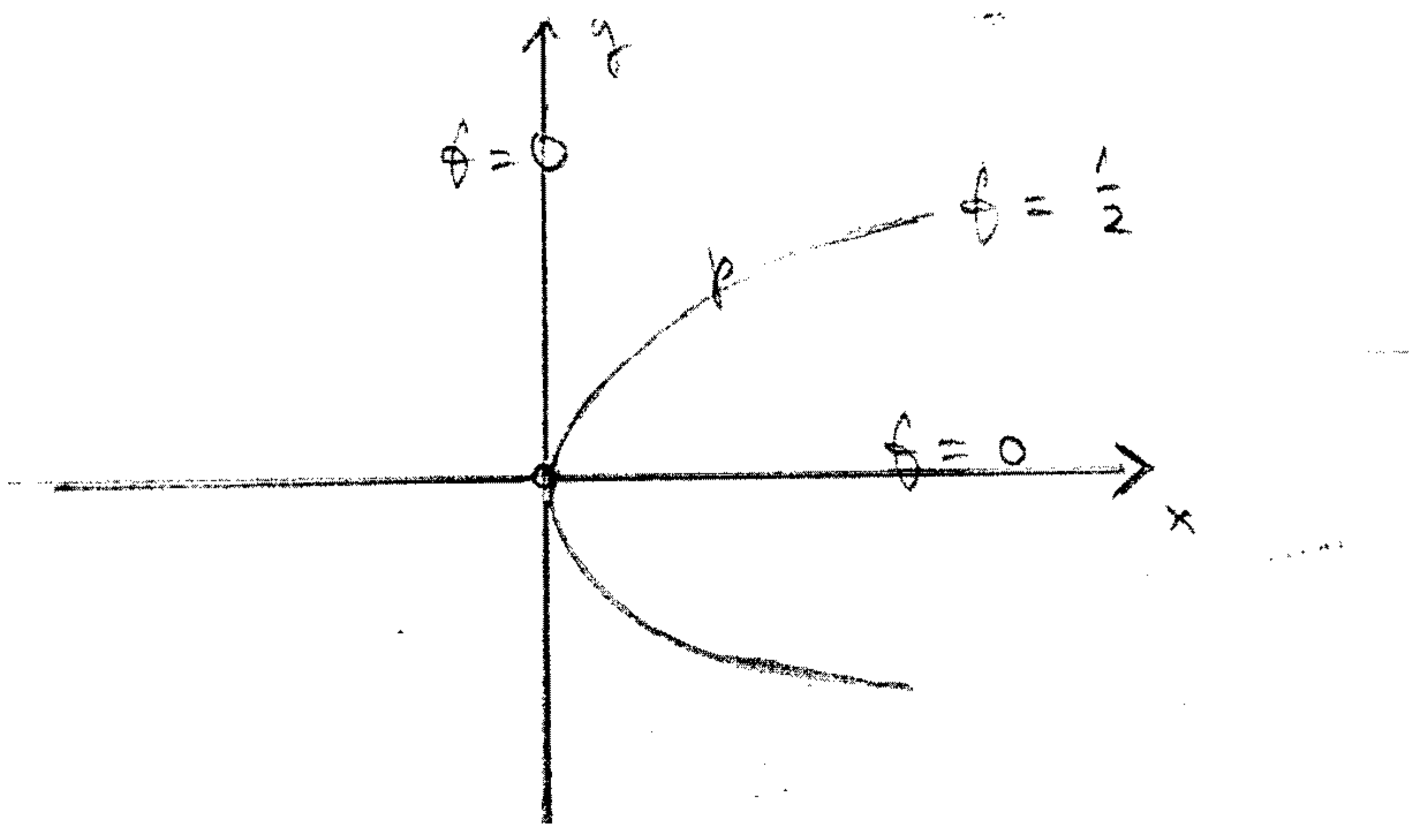
Przykład 7. Funkcja

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad \text{dla} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

jest określona w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ za wyjątkiem początku układu. Funkcja ta przyjmuje na paraboli p o równaniu $y^2 = x$ stałą wartość

(9) $$f(y^2, y) = \frac{1}{2},$$

natomiast znika na osiach współrzędnych (z wyłączeniem punktu $(0,0)$) - por. rys. 5.



[rys. 5]

Obierając ciąg liczb rzeczywistych $\{y_n\}$ zbieżny do zera ale o wyrazach różnych od zera otrzymujemy ciąg $\{(y_n^2, y_n)\}$ punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ spełniający warunki (α), (β) dla $(a,b) = (0,0)$. Obliczenie granicy występującej w warunku (7) daje zgodnie z (9)

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n^2, y_n) = \frac{1}{2}$$

i jednocześnie

$$\lim_{n\to\infty} f(0,y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n,0) = 0.$$

Widzimy więc, że granica ta przyjmuje różne wartości dla różnych ciągów spełniających warunki (α), (β), zatem zgodnie z przyjętą definicją funkcja f nie ma granicy w punkcie $(0,0)$.

W podobny sposób określamy granicę niewłaściwą funkcji. Mówimy, że *funkcja f ma granicę ∞ $(-\infty)$ przy $(x,y) \to (a,b)$* (lub *w punkcie* (a,b)), jeżeli dla dowolnego ciągu punktów (x_n,y_n) spełniającego warunki (α), (β) zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \infty \qquad (\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = -\infty). \tag{10}$$

Zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \infty \qquad (\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = -\infty).$$

Przykład 8. Funkcja

$$f(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|} \qquad \text{dla} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

jest określona w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ za wyjątkiem początku układu. Dla dowolnego ciągu punktów $(x_n,y_n) \to (0,0)$ o wyrazach różnych od $(0,0)$ mamy

$$0 < |x_n| + |y_n| \to 0,$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|+|y_n|} = \infty,$$

a to oznacza, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty.$$

Zauważmy, że podana definicja granicy funkcji pozostaje poprawna, jeżeli funkcja jest określona jedynie w pewnym otoczeniu punktu (a,b), za wyjątkiem samego punktu (a,b) tzn. dla

$$|x-a| < \eta, \qquad |y-b| < \eta, \qquad (x,y) \neq (a,b), \tag{11}$$

gdzie η jest pewną liczbą dodatnią.

Twierdzenia o działaniach na granicach łatwo udowodnić dla funkcji dwóch zmiennych, stosując odpowiednie twierdzenia dotyczące ciągów. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że funkcje f, g mają skończoną granicę przy $(x, y) \to (a, b)$. Wówczas istnieje granica funkcji $f(x, y) \pm g(x, y)$ oraz $f(x, y)g(x, y)$, przy czym zachodzą równości*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \Big(f(x,y) \pm g(x,y) \Big) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y), \tag{12}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = \Big(\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \Big) \Big(\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \Big). \tag{13}$$

Jeżeli założymy dodatkowo, że

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0,$$

to $g(x, y) \neq 0$ dla (x, y) spełniających (11) dla pewnego $\eta > 0$ oraz istnieje granica przy $(x, y) \to (a, b)$ funkcji $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$, przy czym

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}. \tag{14}$$

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że dla (x, y) spełniających (11) zachodzi nierówność*

$$f(x,y) \leq g(x,y)$$

oraz że funkcje f, g mają skończone granice przy $(x, y) \to (a, b)$. Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y).$$

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, prawdziwy jest również odpowiednik twierdzenia o trzech ciągach.

Twierdzenie 4 (o trzech funkcjach). *Załóżmy, że dla (x, y) spełniających* (11) zachodzą nierówności

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$$

oraz że

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = G,$$

gdzie G jest liczbą rzeczywistą (można również przyjąć $G = \infty$ lub $G = -\infty$). Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = G.$$

DOWODY twierdzeń 2 - 4 pozostawiamy Czytelnikowi. □

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że funkcja $f(x,y)$ jest określona dla (x,y) spełniających* (11) *i niech g będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = g \tag{15}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(C) *do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla punktów $(x,y) \neq (a,b)$ i spełniających nierówności*

$$|x-a| < \delta, \qquad |y-b| < \delta$$

było

$$|f(x,y) - g| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Dowód przebiega podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej. Załóżmy najpierw, że spełniony jest warunek (C) i niech $\{(x_n, y_n)\}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki $(\alpha), (\beta)$. Możemy wówczas dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziły nierówności

$$|x_n - a| < \delta, \qquad |y_n - b| < \delta.$$

Na mocy warunku (C) mamy stąd

$$|f(x_n, y_n) - g| < \varepsilon,$$

a to oznacza, że zachodzi (15). Okazaliśmy zatem dostateczność warunku (C). Konieczność tego warunku udowodnimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że zachodzi (15) ale warunek (C) nie jst spełniony. Istnieje wówczas liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka, że dla dowolnego $\delta > 0$ można dobrać punkt $(x_\delta, y_\delta) \neq (a,b)$ spełniający nierówności

$$|x_\delta - a| < \delta, \qquad |y_\delta - b| < \delta \tag{16}$$

oraz

$$|f(x_\delta, y_\delta) - g| \geq \varepsilon_0. \tag{17}$$

Jeżeli przyjmiemy $\delta = \frac{1}{n}$ i oznaczymy $(x_\delta, y_\delta) = (x_n, y_n)$, to z (16) wynika, że ciąg $\{(x_n, y_n)\}$ spełnia warunki $(\alpha), (\beta)$. Zatem na mocy (15) mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g,$$

co jednak przeczy nierówności (17). □

Przyjęta przez nas definicja granicy funkcji dwóch zmiennych, oparta na pojęciu granicy ciągu, pochodzi od E. Heinego i nosi nazwę *definicji Heinego.* Podany w twierdzeniu 5 warunek (C) bywa również przyjmowany jako definicja granicy funkcji - jest to *definicja Cauchy'ego.* Z twierdzenia 5 wynika, że obie definicje są równoważne.

5. Ciągłość funkcji.

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu (a,b) tzn. dla (x,y) spełniających warunki

$$|x-a|<\eta, \qquad |y-b|<\eta, \tag{18}$$

gdzie η jest odpowiednio dobraną liczbą. Mówimy, że funkcja f *jest ciągła w punkcie* (a,b), jeżeli
(i) istnieje

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=g\in\mathbb{R},$$

oraz
(ii) $f(a,b)=g$.

Ponieważ w punkcie 4 wprowadziliśmy dwie równoważne definicje granicy funkcji (definicję Heinego i definicję Cauchy'ego), możemy sformułować dwa warunki konieczne i dostateczne ciągłości funkcji f w punkcie (a,b).

Twierdzenie 6. *Funkcja f określona dla (x,y) spełniających* (18) *jest ciągła w punkcie (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n,y_n)\to(a,b)$*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=f(a,b). \tag{19}$$

Twierdzenie 7. *Funkcja f określona dla (x,y) spełniających* (18) *jest ciągła w punkcie (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy gdy do dowolnego $\varepsilon>0$ można dobrać liczbę $\delta>0$ tak, by dla (x,y) spełniających nierówności*

$$|x-a|<\delta, \qquad |y-b|<\delta \tag{20}$$

było

$$|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon. \tag{21}$$

Z twierdzenia 2 wynika natychmiast

Twierdzenie 8. *Załóżmy, że funkcje f,g określone dla (x,y) spełniających* (18) *są ciągłe w punkcie (a,b). Wówczas*
(i) funkcje $f+g$, $f-g$ oraz fg są ciągłe w punkcie (a,b),
(ii) jeżeli $g(a,b)\neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie (a,b).

Dowody twierdzeń 6 - 8 pozostawiamy Czytelnikowi. □

Przykład 9. Funkcja

$$f(x,y)=\sin x+\sin y$$

rozważana w Przykładzie 5 jest ciągła w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ gdyż, jak okazaliśmy,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\sin a+\sin b=f(a,b)$$

dla dowolnego punktu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Przykład 10. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ c \quad \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Opierając się na twierdzeniu 6 łatwo sprawdzić, że każda z funkcji

$$f_1(x,y) = x, \qquad f_2(x,y) = y, \qquad f_3(x,y) = x^2, \qquad f_4(x,y) = y^2$$

jest ciągła w dowolnym punkcie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 8, funkcja f jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny poza początkiem układu. Natomiast nie jest ona ciągła w punkcie $(0,0)$ (niezależnie od tego, jak obierzemy liczbę rzeczywistą c), gdyż, jak wykazaliśmy w Przykładzie 6, funkcja ta nie posiada granicy przy $(x,y) \to (0,0)$.

Przykład 11. Funkcja $h(x,y)$ rozważana w Przykładzie 2 jest nieciągła w każdym punkcie (a,b) leżącym na jednej z prostych p, q (por. rys. 2). Dla dowolnego punktu (x,y) leżącego poza tymi prostymi mamy bowiem

$$|h(x,y) - h(a,b)| = \frac{1}{2}.$$

Wobec tego, przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{4}$ i obierając dowolnie liczbę $\delta > 0$, możemy znaleźć punkt (x,y) spełniający nierówności (20) taki, że nierówność ε-owa (21) (z zastąpieniem funkcji f przez h) nie zachodzi.

Zadania.

1. Narysować na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ zbiór punktów (x,y) określonych nierównościami

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & |x-a| < \delta, \qquad |y-b| < \delta, \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ \delta > 0), \\ \text{(ii)} & \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < 1, \qquad y \geq 0. \end{array}$$

2. Sprawdzić, jak wygląda w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zbiór punktów (x,y,z) spełniających warunki

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & x^2 + y^2 = z^2, \qquad z > 0, \\ \text{(ii)} & (x-2)^2 + (y-1)^2 < z^2, \qquad z < 0, \\ \text{(iii)} & (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \geq 4. \end{array}$$

3. Zbadać ciągłość funkcji f określonej dla $(x,y) \neq (0,0)$ wzorem

a.) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, b.) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

Jak wygląda wykres tej funkcji?

4. Jakie jest wzajemne położenie prostych p_k i p_r, na których funkcja f rozważana w Przykładzie 6 przyjmuje tą samą wartość? Jak wygląda wykres funkcji f?

5. Sformułować i udowodnić odpowiednik twierdzenia 5 w przypadku granicy niewłaściwej.

6. Niech

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = c,$$

gdzie c jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Zbadać ciągłość funkcji f.
Wskazówka. Wykorzystać Przykład 7 i twierdzenie 6.

7. Jak wygląda zbiór punktów $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ określony przez warunki

$$\text{(i)} \qquad x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \qquad (0 \le t \le 2\pi$$

przy ustalonym $r > 0$,

$$\text{(ii)} \qquad x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

przy danych x_0, y_0, α, β?

8. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ciągłą na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i niech

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (\tau_0 \le t \le \tau_1)$$

będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[\tau_0,\ \tau_1]$.
(i) Udowodnić ciągłość superpozycji

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

w przedziale $[\tau_0,\ \tau_1]$.
(ii) Niech

$$x(\tau_0) = a, \quad y(\tau_0) = b, \quad x(\tau_1) = c, \quad y(\tau_1) = d$$

i niech

$$f(a,b) = A, \qquad f(c,d) = B, \qquad (A < B).$$

Udowodnić, że dla dowolnie ustalonej liczby z_0, $(A < z_0 < B)$ istnieje punkt (x_0, y_0) taki, że

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0)$$

dla pewnego $t_0 \in [\tau_0, \tau_1]$ oraz

$$f(x_0, y_0) = z_0.$$

Podać sens geometryczny stwierdzeń (i), (ii).

Wskazówka. W punkcie (ii) oprzeć się na twierdzeniu Bolzano - Cauchy'ego: *Funkcja jednej zmiennej ciągła w przedziale* $\mathbb{P}$ *ma w tym przedziale własność Darboux.*

9. Sformułować definicję Heinego granicy funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ w sposób analogiczny, jak to zostało zrobione dla funkcji dwóch zmiennych w punkcie 4. Następnie sformułować i udowodnić odpowiedniki twierdzeń 2 - 5.

10. Niech

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{|x|^3 + |y|^3 + |z|^3} \qquad \text{dla} \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Czy funkcja f ma granicę w punkcie $(0, 0, 0)$?
Wskazówka. Zbadać zachowanie się funkcji na zbiorze punktów określonym równaniami

$$y = kx, \qquad z = kx, \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{22}$$

gdzie k jest daną liczbą rzeczywistą. Jaki twór geometryczny określają w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ równania (22)?