

Recenzja pracy doktorskiej
mgr Agnieszki Czyżewskiej-Jankowskiej
pt. „Nieorientowalne mapy i kombinatoryka wielomianów Jacka”

W swojej pracy doktorskiej mgr Agnieszka Czyżewska-Jankowska zajmuje się badaniem tzw. charakterów Jacka, które są odpowiednio znormalizowanymi współczynnikami wielomianów Jacka zapisanych w bazie potęgowych wielomianów symetrycznych. Wśród powodów zainteresowania tymi wielomianami są ich związki z różnymi działami matematyki i fizyki (m. in. z teorią reprezentacji grup symetrycznych, całkami Selberga, mechaniką statystyczną, geometrią algebraiczną). Charaktery Jacka są funkcjami określonymi na zbiorze diagramów Younga należącymi do pierścienia tzw. α -wielomianów na tym zbiorze. W cyklu prac opublikowanych w kilku ostatnich latach Dołęga, Féray i Śniady pokazali, że w wielu przypadkach charaktery Jacka dają się w zgrabny sposób wyrazić w postaci tzw. formuł Stanleya, tj. sum pewnych parametrów indeksowanych pewnego rodzaju obiektami kombinatorycznymi. Odkrycie tego związku pozwala zastosować kombinatoryczne metody do badania charakterów Jacka. Praca doktorska mgr Czyżewskiej-Jankowskiej mieści się w tym właśnie nurcie badawczym.

Ważną własnością α -wielomianów (a więc i charakterów Jacka) jest to, że dają się one zapisać jako wielomiany na ciągu wolnych kumulant. Są to tzw. wielomiany Kerova. Wielomiany Kerova są ściśle powiązane ze wspomnianymi w poprzednim akapicie formułami Stanleya.

Głównym wynikiem pracy doktorskiej mgr Czyżewskiej-Jankowskiej jest dowód hipotezy podającej domniemaną formułę Stanleya dla dominujących jednorodnych części pewnego rodzaju charakterów Jacka. Dokładniej, w hipotezie tej te jednorodne części są sumami pewnych parametrów indeksowanych dwudzielnymi nieorientowanymi mapami o genusach $0, \frac{1}{2}, 1$ i $\frac{3}{2}$, co odpowiada jednorodnym częściom charakterów Jacka kolejno czterech najwyższych stopni. Tak więc hipoteza ta określa spodziewaną kombinatoryczną interpretację tych dominujących części. Aby udowodnić tę hipotezę autorka pokazuje, że zdefiniowana przez tę hipotetyczną formułę Stanleya funkcja na zbiorze diagramów Younga jest α -wielomianem, a więc daje się jednoznacznie zapisać jako wielomian Kerova. Następnie znajduje współczynniki tego wielomianu. Pozwala to udowodnić rozważaną hipotezę dla jednorodnych części trzech najwyższych stopni, ponieważ współczynniki te okazują się być tożsame z odpowiednimi współczynnikami w wielomianie Kerova dla charakterów Jacka, które w tych przypadkach są znane. Dla jednorodnej części

czwartego najwyższego stopnia współczynniki w wielomianie Kerova nie są znane, ale autorka pokazała, że współczynniki obliczone na podstawie jej hipotetycznej formuły Stanleya (w tym przypadku rozważa się w tej formule nieorientowalne mapy o genusie $\frac{3}{2}$) są równe odpowiednim współczynnikom w znanej hipotezie Lasalle'a z 2009 roku przewidującej spodziewane wartości współczynników w wielomianach Kerova dla charakterów Jacka.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów. W dwóch pierwszych autorka wprowadza czytelnika w tematykę rozprawy. Definiuje najważniejsze pojęcia, podaje przykłady, kreśli tło rozważanej tematyki badawczej i umiejscawia na tym tle swoje wyniki.

Trzeci rozdział pracy oraz część początku rozdziału 4 zawierają opis aparatu kombinatorycznego, który jest używany w pracy. Aparat ten w dużej części wywodzi się z pracy Dołęgi, Féraya i Śniadego z 2014 roku, w której autorzy m. in. pokazali formułę Stanleya dla pewnych wielomianów Jacka. Praca doktorska mgr Czyżewskiej-Jankowskiej stanowi kontynuację badań podjętych w tamtej pracy. Ta część rozprawy napisana jest jasno i dobrze się ją czyta.

Głównym celem rozdziału 4 jest pokazanie, że rozważana przez autorkę funkcja zdefiniowana przez hipotetyczną formułę Stanleya dla jednorodnych części charakterów Jacka jest α -wielomianem na zbiorze diagramów Younga. Jest to potrzebne, aby móc użyć ważnego Lematu 5.5.1 z rozdziału 5. Ta część pracy wymagała sporej liczby nietrywialnych pomysłów i zawiera niemalą dawkę ładnej kombinatoryki. W tym kontekście szczególnie podoba mi się zgrabne Twierdzenie 4.2.2 oraz Twierdzenie 4.2.13 dotyczące pewnego związku pomiędzy orientowanymi i nieorientowanymi mapami.

W rozdziale 5 znajduje się kluczowy Lemat 5.5.1, który daje przepis jak policzyć, znając formułę Stanleya dla danego α -wielomianu na zbiorze diagramów Younga, współczynniki wielomianu Kerova. Znalezienie tych współczynników sprowadza się do policzenia skomplikowanej sumy parametrów indeksowanych grafami dwudzielnymi z pewnej rodziny grafów występującej w formule Stanleya oraz pewnymi pokolorowaniami tych grafów. Dowód tego lematu jest nietrudnym uogólnieniem podobnego rezultatu uzyskanego w 2010 r. przez Dołęgę, Féraya i Śniadego. Rozdział ten zawiera ponadto precyzyjne sformułowania głównych wyników pracy. Pozostałe dwa rozdziały zawierają dowody tych wyników polegające na odpowiednim zastosowaniu Lematu 5.5.1.

W rozdziale 6 autorka zajmuje się obliczeniem współczynników przy jedynomianach trzech najwyższych stopni w wielomianie Kerova dla α -wielomianu

zdefiniowanego w dowodzonej przez autorkę formule Stanleya. Aby obliczyć te współczynniki, trzeba zastosować Lemat 5.5.1 dla nieorientowalnych map o genusach kolejno 0 , $\frac{1}{2}$ i 1 oraz odpowiednich pokolorowań. Zastosowanie tego lematu wymagało sporej biegłości w posługiwaniu się metodami zliczania obiektów kombinatorycznych i drobiazgowego rozważenia wszystkich przypadków.

Rozdział 7 poświęcony jest w całości współczynnikom przy jednomianach czwartego najwyższego stopnia wielomianu Kerova dla α -wielomianu zdefiniowanego w dowodzonej przez autorkę formule Stanleya. Wymaga to zastosowania Lematu 5.5.1 dla map nieorientowalnych o genusie $\frac{3}{2}$. Schemat postępowania jest podobny jak w rozdziale 6, ale liczba map, a co za tym idzie liczba przypadków, które trzeba rozważyć jest na tyle duża, że potrzebne są pewne nowe redukujące liczbę przypadków pomysły oraz niezbędne jest użycie komputera.

Wyniki uzyskane przez mgr Agnieszkę Czyżewską-Jankowską w swojej rozprawie doktorskiej mieszczą się ważnym nurcie badawczym współczesnej matematyki. Świadczy o tym choćby fakt, że niektóre prace z tej dziedziny, w tym publikacje, na które autorka powołuje się w swojej pracy doktorskiej, ukazały się w tak prestiżowych czasopismach matematycznych jak *Annals of Mathematics* czy *Advances in Mathematics*. W tym kontekście uzyskanie przez autorkę oryginalnych rezultatów w tej dziedzinie zasługuje na uznanie. Co prawda rozprawa nie zawiera jakichś przełomowych rezultatów, czy istotnie nowych metod. Autorka bazuje w większości na metodach i technikach wprowadzonych przez innych autorów. Niemniej jednak uzyskane przez nią rezultaty są wartościowe, mają swoją naukową wagę i stanowią istotny wkład w badanie charakterów Jacka. Pozwalają lepiej zrozumieć naturę związku charakterów Jacka z ich kombinatoryczną interpretacją.

Napisanie tej pracy doktorskiej wymagało od autorki nie tylko dogłębnego zrozumienia rozważanych niełatwych zagadnień, ale również opanowania specyficznego warsztatu matematycznego o charakterze przede wszystkim kombinatoryczno-topologicznym. Zastosowanie tego aparatu wymagało znacznej biegłości i pomysłowości, a także nabycia niezbędnych intuicji.

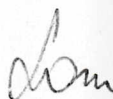
Rozprawa przedstawia się nieco gorzej od strony redakcyjnej. Sformułowane w pierwszych dwóch rozdziałach rozprawy definicje kilku ważnych dla zrozumienia rozumowań zawartych w pracy pojęć są niepełne lub podane bardzo skrótowo (np. definicje wielomianu i α -wielomianu na zbiorze diagramów Younga, wolnej kumulanty, czy rozciągnięcia (dilation) diagramu Younga). Nie ułatwia to czytania dalszej części pracy. W wielu miejscach ta pobieżna

wiedza nie wystarcza do pełnego zrozumienia przedstawianych rozumowań. Na przykład już w pierwszym pojawiającym się w pracy dowodzie wykonuje się działanie na rozciągniętym diagramie Younga, które zdefiniowane było tylko dla „zwykłego” diagramu Younga. Innym przykładem jest używanie bez komentarzy pewnych własności wolnych kumulant, które nie wynikają z podanej przez autorkę definicji. Być może warto było podać nieco więcej przykładów ilustrujących przedstawiane pojęcia i rozumowania.

Dowody kilku twierdzeń w pracy są bardzo szkicowe, zawierają niedomówienia, więc są miejscami trudne do dokładnego prześledzenia (np. dowody Twierdzeń 4.3.1 czy 6.2.3). Dowód Wniosku 5.6.1 zawiera błąd, chociaż sam wniosek jest prawdziwy.

Tych kilka krytycznych uwag odnosi się głównie do redakcji pracy i nie umniejsza mojej wysokiej merytorycznej oceny rozprawy doktorskiej mgr Agnieszki Czyżewskiej-Jankowskiej. Tak więc uważam, że jej praca doktorska w pełni spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i uzasadnia nadanie jej stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

11 kwietnia 2016 r.



prof. dr hab. Zbigniew Lonc
Wydział Matematyki i Nauk
Informacyjnych
Politechnika Warszawska