

prof. dr hab. Zbigniew Palmowski
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
ul. Hoene-Wrońskiego 13
50-376 Wrocław

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ
KRZYSZTOFA KOWALSKIEGO
”ASYMPTOTYCZNE ZACHOWANIE EKSTREMALNEJ POZYCJI
W GAŁĄZKOWYM SPACERZE LOSOWYM”

Rozprawa doktorska Pana Krzysztofa Kowalskiego została napisana pod opieką prof. dra hab. Dariusza Buraczewskiego i dotyczy ekstremalnej pozycji w gałązkowym spacerze losowym. Najważniejsze wyniki z tej rozprawy zostały opublikowane w pracy
Kowalski, K. (2024). Branching random walks with regularly varying perturbations. *ESAIM Probab. Stat.* 28, 379–391,
czyli w dobrym czasopiśmie probabilistycznym oraz w złożonej pracy
Kowalski, K. (2025). Asymptotic behavior of the extremal position in a multi-type branching random walk with heavy-tailed displacements.
<https://arxiv.org/abs/2509.14808>.

Opis i ocena rozprawy.

Rozprawa licząca 66 stron jest napisana z dbałością o czytelnika. Przedstawia ona cele, rezultaty i dowody w sposób bardzo zrozumiały i bardzo dobrze zorganizowany.

Tematyka rozprawy matematycznie dotyczy ekstremalnej pozycji R_n w n -tej generacji gałązkowego błędzenia losowego rozważanego w dwóch przypadkach. Pierwszy to model wielotypowy biorący pod uwagę cząsteczki należące do kilku klas czy też typów. Drugi model uwzględnia z kolei możliwość zaburzeń. W moim odczuciu otrzymane rezultaty są interesujące i ważne dla probabilistyki. Zawartość matematyczna jest zaawansowana oraz wymagała dużej znajomości teorii procesów gałązkowych i teorii błędzeń losowych. Nie znalazłem żadnego błędu merytorycznego.

Podając więcej szczegółów, w **rozdziale pierwszym** przedstawiono podstawy teorii gałązkowych spacerów losowych i opisano modele, które będą przedmiotem badań w późniejszych rozdziałach. Pojawia się też tam przegląd podstawowej literatury.

Rozdział drugi dotyczy nieprzywiedlnego wielotypowego gałązkowego błędzenia losowego z regularnie zmieniającym się rozkładem F_i przemiesz-

czeń ξ^i i -tego typu (Sekcja 2.1) oraz rozkładem typu Weibulowskiego (Sekcja 2.2). W pierwszym przypadku zakłada się, że

$$\begin{aligned} 1 - F_i(x) &\sim L_i(x)x^{-r_i} \quad \text{jak } x \rightarrow \infty, \\ \log(-x)F_i(x) &\rightarrow 0 \quad \text{jak } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

i pokazuje się, że

$$\mathbb{P}(R_n \leq a_n x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\zeta W x^{-r}}],$$

gdzie W jest granicą pojawiającą się w Twierdzeniu Kestena-Stiguma, ζ pewną stałą podaną w sposób jawny oraz $r = r_I$ jest ściśle najmniejszym r_i . Dodatkowo, normalizujący ciąg a_n jest podany poprzez granicę

$$\rho^n (1 - F_I(a_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

gdzie $\rho > 1$ jest wartością własną Perrona-Frobeniusa macierzy średniej $M_{ij} = \mathbf{E}N_{i,j}$ a $N_{i,j}$ podaje liczbę dzieci j -tego typu zrodzonych z cząsteczki typu i -tego w jednej generacji.

Podobny rezultat był uzyskany w [8] używając teorii procesów punktowych ale w przeciwieństwie do tej pracy dopuszcza się istnienie liści na drzewie genealogicznym. Metoda dowodu jest też inna chociaż także oparta o zasadę jednego wielkiego skoku. Dowód głównego Twierdzenia 2.1 jest elegancki i wymagający sporej pomysłowości. Zwłaszcza na wyróżnienie zasługuje dowód granic (2.14) i (2.15).

Drugi przypadek rozkładu typu Weibulowskiego nie był studiowany w kontekście kilku istniejących typów. Zakłada się, że

$$1 - F_i(x)a_j(t) \exp\{-L_j(t)t^{r_j}\},$$

gdzie $r_j \in (0, 1)$, L_j, a_j są funkcjami wolno zmieniającymi się oraz $\frac{L_j(t)}{t^{1-r_j}}$ są ostatecznie niemalejące. W Twierdzeniu 2.5 pokazuje się, że

$$\frac{R_n}{\psi(n)} \xrightarrow{p.w.} (\log \rho)^{\frac{1}{r}},$$

gdzie r minimalizuje r_i , $L(t) = \min\{L_i(t) : r = r_i\}$, zaś $\psi(n)$ spełnia

$$\frac{L(\psi(n))\psi(n)^r}{n} \rightarrow 1.$$

Jest to delikatniejszy przypadek niż analiza rozkładu regularnie zmieniającego się. Kluczowy wydaje się być Lemat 2.8, którego dowód oparty o uogólnioną tożsamość Vandermonde'a jest bardzo elegancki. Dowód głównego Twierdzenia 2.5 jest precyzyjny i oparty jest z grubsza o identyfikację "miejsca" wystąpienia najcięższego ogona oraz wyliczenia "ilości" jego wpływu na końcową pozycję ekstremalną.

Rozdział trzeci zajmuje się przypadkiem przywiedlnym. Rezultaty są podobne. Dowody twierdzeń oparte są na podziale na klasy, wewnątrz których typy mogą wzajemnie powstawać, oraz na indukcji matematycznej. Krok pierwszy w tej indukcji to krok nieprzywiedlny. Przejście z kolei kroku indukcyjnego jest pomysłowe i nowe. W szczególności z dużym zainteresowaniem przeczytałem szacowania na stronach 40-43 rozprawy doktorskiej.

Ostatni rozdział zajmuje się wartością ekstremalną R_n^* w n -tej generacji dla zaburzonego gałęzowego błędzenia losowego. Zaburzenie wprowadzone przez Bandyopadhyay’ego i Ghosh in [5] jest w postaci

$$X_v(\theta) = \frac{1}{\theta} \log \frac{Y_v}{E_v}$$

dla dodatniej stałej θ i dodatnich zmiennych losowych $\{Y_v\}_{v \in \mathbb{T}}$ o rozkładzie regularnie zmieniającym się spełniających

$$1 - F(x) \sim c_+ x^{-\gamma} \quad \text{jak } x \rightarrow +\infty,$$

gdzie $\gamma \in (0, 1)$ i $\mathbb{T}$ oznacza genealogiczne drzewo. Dodatkowo, $\{E_v\}_{v \in \mathbb{T}}$ jest ciągiem i.i.d. wykładniczych zmiennych losowych z parametrem 1 niezależnym od $\{Y_v\}_{v \in \mathbb{T}}$. Definiuje się

$$\theta_0 = \inf \{ \theta > 0 : \nu(\theta) = \theta \nu'(\theta) \}$$

gdzie

$$\nu(\theta) = \log \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N e^{\theta \xi_i} \right],$$

N jest liczbą dzieci w jednym pokoleniu oraz $\nu'(\theta) = e^{-\nu(\theta)} \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^N \xi_i e^{\theta \xi_i} \right]$. Twierdzenia 4.1 i 4.2 są typu Prawa Wielkich Liczb czyli udowadnia się, że jeśli $\mathbb{E} \left[W_1(\gamma\theta) \log_+ W_1(\gamma\theta) \right] < \infty$ dla martyngału Bigginsa $W_n(\theta)$ i $\theta < \frac{\theta_0}{\gamma}$, to

$$\frac{R_n^*}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.w.} \frac{\nu(\gamma\theta)}{\gamma\theta}$$

oraz

$$\frac{R_n^*}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.w.} \frac{\nu(\theta_0)}{\theta_0}$$

kiedy $\theta_0 \leq \theta$. Warto dodać, że jeśli $\theta \geq \frac{\theta_0}{\gamma}$ to $\theta_0 \leq \theta$. Dowód obu powyższych twierdzeń, choć krótki, jest bardzo pomysłowy i bardzo mi się podoba. Zwłaszcza warto zwrócić uwagę na górne szacowanie $\mathbb{P} \left(\frac{R_n^*(\theta)}{n} - \frac{\nu(\beta)}{\beta} < -\varepsilon \right)$.

Twierdzenia 4.3-4.5 są typu słabych zbieżności. Udowadnia się w nich, że przy założeniach Twierdzenia 4.1 ciąg $R_n^* - n \frac{\nu(\gamma\theta)}{\gamma\theta}$ zbiega słabo i identyfikuje się jego granicę. Z kolei przy pewnych dodatkowych założeniach pokazuje się, że centrowanie przy słabej zbieżności może być też inne, w szczególności $R_n^* - n \frac{\nu(\theta_0)}{\theta_0} + \frac{1}{2\theta_0} \log n$ i $R_n^* - n \frac{\nu(\theta_0)}{\theta_0} + \frac{3 \log n}{2\theta_0}$ zbiegają słabo o ile odpowiednio $\theta = \frac{\theta_0}{\gamma}$ i $\theta > \theta_0$. Dowody tych twierdzeń oparte są o Lemat 4.1 z [13] (czy też Lemma 4.5 z rozprawy doktorskiej) i jako takie są znacznie mniej złożone choć oczywiście uzupełniają całość teorii.

Drobne korekty.

Poniżej podaję listę pewnych poprawek, które mogą być użyteczne w przyszłości.

- Brakuje przecinków i kropek po bardzo wielu tożsamościach. W szczególności raz są przecinki przed "where", raz ich nie ma.
- Na str. 8 brakuje spacji po [14,15].
- $\phi(x)$ chyba nie jest używane później - nie ma więc sensu wprowadzać tego oznaczenia.
- W (1.1) powinno być N a nie n .
- W Tw. 2.1 i Tw. 3.1 powinno być r a nie q w granicy (w dowodzie Tw. 3.1 też warto zdecydować się na notację albo z r albo z q).
- Str. 27 - 'from Lemma 2.9'.
- Str. 12 - brakuje spacji przed [44].
- Na początku Rozdziału 4 warto by było przypomnieć notację R_n^* ze strony 13.
- Warto też dodać uwagę ze szczegółami wyjaśniającymi jak ma się warunek $\theta \leq \theta_0$ do nierówności $\theta \geq \frac{\theta_0}{\gamma}$. Jedno zdanie zaraz po Tw. 4.2 i 4.5 wydaje się być niewystarczające.

Konkluzja.

Wobec powyższych uwag, uważam, że rozprawa doktorska magistra Krzysztofa Kowalskiego w pełni spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora nauk w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Wrocław, dnia 15 grudnia 2025