Wrocław, 29.11.2024

prof. dr hab. inż. Zbigniew Michna
Katedra Badań Operacyjnych i Inteligencji Biznesowej
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Konrada Krysteckiego pt. „Ruin probability in multidimensional self-similar Gaussian risk models"

Rozprawa mgr. Konrada Krsyteckiego zajmuje się ekstremami wielowymiarowych procesów gaussowskich w kontekście ich zastosowania do modelowania zjawisk ubezpieczeniowych. Badanie pewnych funkcjonałów w tym supremum czy wędrówek procesów gaussowskich jest jedną z podstawowych gałęzi teorii procesów stochastycznych datujących swoje początki w pracach S.M. Bermana [3] czy J. Pickandsa [7]. Od tego czasu powstało wiele artykułów na ten temat ze względu na swoją fundamentalną tematykę jak również ze względu na zastosowania w ubezpieczeniach, finansach, fizyce czy biologii.

Przechodząc do szczegółów rozprawa składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów i bibliografii. We wstępie Autor przedstawia motywacje skłaniające do badania poszczególnych problemów. Motywacje te oparte są głównie na ubezpieczeniach w kierunku estymacji prawdopodobieństwa ruiny firmy ubezpieczeniowej czy portfela ubezpieczeniowego. Następnie przedstawiony jest zakres badań w poszczególnych rozdziałach i definicje rozważanych procesów stochastycznych.

W rozdziale drugim Doktorant zajmuje się dwuwymiarowym procesem Wienera o stałej wzajemnej korelacji. Bada tzw. jednoczesne prawdopodobieństwo ruiny na skończonym horyzoncie czasu. Rozważane prawdopodobieństwo jest w ogólniejszym kontekście a mianowicie zakłada się, że dryf (składka ubezpieczeniowa na jednostkę czasu) jest pewną funkcją potęgową $c_i u^\alpha$ jak i poziom kapitału początkowego również jest pewną funkcją potęgową $a_i u^\beta$, gdzie $\alpha, \beta \geq 0$ i stałe c_i, a_i są dodatnie. W rozdziale tym Autor znajduje asymptotyki prawdopodobieństwa dla $u \to \infty$. Rozpatruje trzy główne przypadki $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ i $\alpha > \beta$. Ponadto powstaje jeszcze wiele przypadków w zależności od parametrów a_i i korelacji ρ. Dowody są oparte na odpowiednim rozbiciu na podprzedziały, odpowiednim szacowaniu prawdopodobieństw jak i na słabej zbieżności procesów, nierówności Borella, samopodobieństwie

Z. Michna

procesu Wienera i odpowiednim zastosowaniu rozwiązania problemu programowania kwadratowego. Najbardziej skomplikowany wydaje się przypadek $\alpha = \beta$, gdzie pojawiają się przypadki redukcji wymiaru w problemie programowania kwadratowego i pełnego wymiaru. Najprostszy jak można było się spodziewać jest przypadek gdy dryf dominuje nad kapitałem początkowym tzn. $\alpha > \beta$. W Lemacie 2.2.3 Doktorant korzysta z nierówności Borella-Adlera (str. 16) i nie jest jasne jak szacuje wartość oczekiwaną supremum procesu Z. Ten rozdział pracy jest najbardziej obszerny i liczy ponad 20 stron.

W rozdziale 3. Doktorant zajmuje się szerszą klasą procesów a mianowicie ułamkowym ruchem Browna ale powraca do przypadku jednowymiarowego. Bada prawdopodobieństwo ruiny na skończonym horyzoncie czasu sprawdzane w dyskretnych losowych chwilach czasu. Dokładniej, chwile inspekcji ruiny tworzą proces odnowy. Dla tak określonego problemu zostaje znaleziona asymptotyka prawdopodobieństwa ruiny dla kapitału początkowego dążącego do nieskończoności. Dowód rozbity jest na dwa przypadki: parametr Hursta $H \geq 1/2$ i $H < 1/2$. Ciekawe jest, że otrzymana asymptotyka w Tw. 3.2.2 jest jednolita dla $H > 1/2$, $H = 1/2$ i $H < 1/2$ co nie ma miejsca w przypadku ciągłej inspekcji czyli po prostu dla supremum wyznaczanego na całym odcinku. Wtedy stała przed $\mathbb{P}(B_H(T) > u + cT)$ (ruina w ostatnim punkcie przedziału) jest odpowiednio 1, 2 i stała zależna od stałej Pickandsa. Dowód Tw. 3.2.2 podobnie jak w poprzednim rozdziale oparty jest na odpowiednim rozbiciu przedziału i rozdzielony jest na 2 przypadki $H \geq 1/2$ i $H < 1/2$. Jako przykład rozpatrywany jest proces odnowy generowany przez rozkład wykładniczy.

Rozdział 4. zajmuje się ponownie dwuwymiarowym procesem Wienera o stałej korelacji $\rho > 0$ i bada prawdopodobieństwo tzw. ruiny paryskiej. Autor rozpatruje niejednoczesną ruinę paryską na skończonym horyzoncie i skumulowaną ruinę paryską na skończonym horyzoncie czasu. Czasy przebywania powyżej poziomów („w ruinie") są zależne od u (kapitału początkowego) $H_1(u), H_2(u)$ i rozważane są przypadki gdy dążą do zera lub do stałych większych od zera. Ponadto w tym rozdziale znajdowane są logarytmiczne asymptotyki czyli dla zlogarytmowanego prawdopodobieństwa ruiny. Otrzymane logarytmiczne asymptotyki nie zależą od dryfów c_i. Ponadto są takie same dla ruiny paryskiej i skumulowanej ruiny paryskiej. Dowód przypadku gdy funkcje $H_i(u)$ dążą do zera rozbity jest na dwie części w zależności od wartości parametru t^*, który w rozdziale tym nie został określony. Dowód korzysta z asymptotyki prawdopodobieństwa niejednoczesnej ruiny (zob. [4]) tak więc prawdopodobnie oznaczenie to pochodzi z tego dowodu. Tak więc dowód wymaga tu dopracowania i wyjaśnień. Natomiast dowód przypadku, gdy funkcje $H_i(u)$ dążą do stałych dodatnich wydaje się prostszy i jest oparty na odpowiednim warunkowaniu i wynikach dla prawdopodobieństwa niejednoczesnej ruiny na skończonym horyzoncie (zob. [4]). Ogólnie oznaczenia są tu niedopracowane jak i niektóre opisy są niedokładne i przez to niezrozumiałe. Ta część pracy jest rozszerzeniem wyników otrzymanych w pracy zob. [4] i czytelnik przed lekturą tej części powinien najpierw zapoznać się z artykułem [4].

W podrozdziale 4.5 prezentowane są symulacje. Autor przedstawia wykresy funkcji $q_a(s,t)$ z tymże są one robione dla $\bar{a}$ określonego w pracy [4]. Na podstawie wykresów Doktorant wyznacza, gdzie są punktu optymalne określone dla granic w

Z. Michna

asymptotykach. Przedstawiona tu analiza nie jest jasna i nie przedstawiono jaki jest jej cel. Ponadto Doktorant prezentuje wykresy pojedynczych trajektorii procesu i określonych barier. Twierdzi, że są to najbardziej prawdopodobne trajektorie. Brakuje tu opisu metod czy teorii użytej do wyznaczenia najbardziej prawdopodobnych trajektorii. Przede wszystkim dla mnie brakuje symulacji opartych na metodach Monte Carlo prawdopodobieństw ruiny badanych w rozdziale czwartym i porównania ich z otrzymanymi asymptotykami. Symulacje prawdopodobieństwa ruiny na skończonym horyzoncie czasu są z technicznego punktu widzenia dużo łatwiejsze niż na nieskończonym horyzoncie. Tak więc ich wykonanie nie powinno być zbyt trudne. Podsumowując podrozdział ten mógłby być znacznie bogatszy i ciekawszy. Ogólnie rozdział a nie podrozdział poświęcony symulacjom prawdopodobieństw ruiny mógłby być na końcu rozprawy i mógłby zawierać symulacje prawdopodobieństw ruiny dla wszystkich rozważanych modeli. Tak więc w tej części pozostaje jeszcze dużo do zrobienia, może na następną publikację.

W ostatnim rozdziale badane jest prawdopodobieństwo niejednoczesnej ruiny na skończonym horyzoncie czasu dla wielowymiarowego procesu Wienera o stałych i nieujemnych wzajemnych korelacjach (dla tego samego czasu i określonych współrzędnych procesu). Doktorant znajduje dolne i górne ograniczenia dla prawdopodobieństwa ruiny. Jest to uogólnienie pewnych nierówności dla przypadku jednowymiarowego na przypadek wielowymiarowy. Ponadto wyprowadzona zostaje asymptotyka tego prawdopodobieństwa dla kapitału początkowego dążącego do nieskończoności. Przeprowadzając dowód Autor rozbija na odpowiednie przedziały i szacuje prawdopodobieństwo. Ponadto korzysta z nierówności Borella i znanych wyników dla łącznych rozkładów supremum. Dowód nie jest bardzo długi ale wymagał ponadprzeciętnych umiejętności rachunkowych z analizy matematycznej funkcji wielu zmiennych.

Bibliografia rozprawy składa się z 72 pozycji. Znajdują się wśród nich bieżące artykuły sprzed kilku lat opublikowane w najlepszych czasopismach z zakresu probabilistyki i procesów stochastycznych. Ponadto Autor cytuje pozycje książkowe R.J. Adlera [1], [2] czy V.I. Piterbarga [8].

Tak więc podsumowując, podjęta tematyka rozprawy jest bardzo ciekawa ze względu na to, że bazuje na procesach gaussowskich takich jak wielowymiarowy proces Wienera czy ułamkowy ruch Browna, które są podstawowymi procesami stochastycznymi badanymi obecnie w różnych aspektach z teoretycznego punktu widzenia i ponadto wykorzystywanymi w wielu modelach w fizyce, biologii, ekonomii czy finansach. Doktorant wykazał się głęboką znajomością i umiejętnością zastosowania zaawansowanych metod i technik wykorzystywanych w teorii ekstremów procesów gaussowskich. Zastosował i rozwinął te metody dla procesów wielowymiarowych co jest bardzo trudnym zadaniem z punktu widzenia analizy matematycznej funkcji wielu zmiennych. Ponadto dowody twierdzeń wymagały ponadprzeciętnych zdolności z zakresu analizy matematycznej i intuicji związanych z zachowaniem asymptotycznym funkcji i całek. Dowody są długie wymagające wiele pracy i staranności. Należy jednak dodać, że w niektórych miejscach praca wymaga jeszcze większej dokładności i doprecyzowania niektórych przejść jak i opisów służących intuicyjnemu zrozumieniu otrzymanych wyników. Ponadto otrzymane rezultaty są głębokie, cie-

Z. Michna

kawe z punktu widzenia ekstremów procesów stochastycznych, analizy matematycznej jak i zastosowań w ubezpieczeniach czy finansach. Tematyka prezentowana w pracy jak i uzyskane wyniki otwierają wiele ścieżek do dalszych ciekawych i koniecznych badań w zakresie ekstremów gaussowskich procesów stochastycznych.

Dorobek naukowy Doktoranta składa się z trzech publikacji z czego jedna jest z dwoma współautorami (Skandinavian Actuarial Journal ([4]) i dwie pozostałe są samodzielne (Statistics and Probability Letters [5] i Probability and Mathematical Statistics [6]). Wszystkie te czasopisma są listy JCR (Journal Citation Reports, posiadają impact factor). Tak więc kończąc, rozprawa spełnia wymagania stawiane dysertacjom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Konrada Krysteckiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z. Michna

Bibliografia

[1] R.J. Adler (1990) *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes.* IMS.

[2] [2] R.J. Adler, J.E. Taylor (2007) *Random fields and geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.

[3] S.M. Berman (1964) *Limit theorems for the maximum term in stationary sequences.* Ann. Math. Statist. **35**(2), 502–516.

[4] K .Dębicki, E. Hashorva, K. Krystecki (2021) *Finite-time ruin probability for correlated Brownian motions.* Scandinavian Actuarial Journal, 1–26.

[5] K. Krystecki (2022) *Parisian ruin probability for two-dimensional Brownian risk model.* Statistics & Probability Letters, **182**, 1–10.

[6] K. Krystecki (2023) *Cumulative parisian ruin probability for two-dimensional Brownian risk model.* Probability and Mathematical Statistics, **43**(1), 63–81.

[7] (1969) J. Pickands *Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes.* Trans. Amer. Math. Soc. **145**, 51–73.

[8] V.I. Piterbarg (1996) *Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields.* Volume 148 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI.

Zbigniew Michna

Z. Michna