

Wrocław, 01.09.2025

prof. dr hab. inż. Zbigniew Michna
Katedra Badań Operacyjnych i Inteligencji Biznesowej
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Krzysztofa Kępczyńskiego
pt. „Asymptotics of functionals of Gaussian and Lévy
processes with a view towards risk and queueing models”

Rozprawa mgr. Krzysztofa Kępczyńskiego zajmuje się ekstremami i ich pochodnymi funkcjonalami procesów gaussowskich i procesów Lévy'ego w kontekście ich zastosowania do modelowania zjawisk ubezpieczeniowych i kolejkowych. Badanie pewnych funkcjonałów w tym supremum czy czasów przebywania procesów gaussowskich jest jedną z podstawowych gałęzi teorii procesów stochastycznych datujących swoje początki w pracach S.M. Bermana [4] czy J. Pickandsa [11]. Od tego czasu powstało wiele artykułów na ten temat ze względu na swoją fundamentalną tematykę jak również ze względu na zastosowania w ubezpieczeniach, finansach, fizyce, biologii czy badaniach operacyjnych.

Przechodząc do szczegółów rozprawa składa się ze wstępu, czterech rozdziałów i bibliografii. We wstępie Autor cytuje dotychczasowe artykuły z zakresu prezentowanego w rozprawie wraz z motywacjami do badania rozważanych w pracy procesów i rozkładów funkcjonałów. Następnie Autor streszcza poszczególne rozdziały rozprawy.

W rozdziale drugim Doktorant zajmuje się dwuwymiarowym procesem Wienera o stałej wzajemnej korelacji. Bada rozkład czasu przebywania na skończonym odcinku czasu ponad pewnym poziomem dwuwymiarowego procesu Wienera z liniowym dryfem. Problem ten jest równoważny wyznaczeniu prawdopodobieństwa skumulowanej paryskiej ruiny dla modelu opartego na procesie gaussowskim. Model może być wykorzystany do wielu niezależnych procesów ryzyka (wielu niezależnych firm ubezpieczeniowych) w celu oszacowania ich łącznej ruiny. W szczególnym przypadku dla skumulowanej paryskiej ruiny można otrzymać rozkład jednoczesnej ruiny. W rozdziale tym Doktorant znajduje asymptotykę prawdopodobieństwa czasu przebywania ponad poziomem (a_1u, a_2u) , gdy $u \rightarrow \infty$, o wartości większej od zu^{-2} , $z > 0$

tzn. asymptotykę prawdopodobieństwa

$\mathbb{P}(\text{czas przebywania ponad } (a_1u, a_2u) \text{ dla obu procesów ryzyka } > zu^{-2}).$

Asymptotyka prawdopodobieństwa opisana jest w dwóch twierdzeniach przy warunkach dających redukcję wymiarowości (jedna współrzędna dominuje) i przy pełnej wymiarowości. Dowód tych twierdzeń oparty jest na programowaniu kwadratowym, metodzie podwójnej sumy zastosowanej do czasów przebywania i wykorzystaniu nierówności Borella-TIS.

Rozdział trzeci rozprawy zajmuje się stacjonarnym procesem zawartości bufora z wejściem modelowanym ułamkowym ruchem Browna tzn. zawartość bufora opisana jest przez (rozwiązanie problemu Skorochoda)

$$Q(t) = \sup_{-\infty < s \leq t} (B_H(t) - B_H(s) - c(t - s)), \quad (1)$$

gdzie B_H jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta H i $c > 0$ intensywnością serwisu. Celem tej części rozprawy jest znalezienie asymptotyki prawdopodobieństwa przepełnienia bufora na losowym odcinku czasu niezależnym od procesu wejścia. Dla deterministycznych odcinków czasu problem ten został zbadany (zob. np. Dębicki i Liu [6]). Losowy czas jest modelowany jako suma zmiennych losowych niezależnych i zależny ponadto od poziomu przepełnienia bufora. Jaka jest interpretacja praktyczna takiego losowego odcinka czasu czy jest to tylko założenie teoretyczne ułatwiające znalezienie asymptotyki? Jeśli jest to założenie teoretyczne to wydaje się, że można byłoby rozważyć tu prostsze losowe odcinki czasu a przy najmniej zapisać je w prostszej postaci. Pojawiają się dodatkowo dwa parametry β i γ i suma zmiennych jest liczona do u^β co raczej nie jest liczbą całkowitą. Kandydat rozpatruje tu trzy przypadki zmiennych losowych tworzących sumę: całkowalnych, o rozkładach regularnie zmieniających się z parametrem $\alpha \in (0, 1)$ i wolno zmieniających. W pierwszym scenariuszu tzn. przy założeniu, że zmienne losowe opisujące odcinek czasu są całkowalne asymptotyki sprowadzają się do asymptotyk na deterministycznym odcinku czasu wyprowadzonym wcześniej w pracy Dębicki i Liu [6]. Ponadto dla tego przypadku Doktorant pokazuje przykład dla czasów o rozkładzie wykładniczym i dla procesu wejścia będącego procesem Wienera. Dla przypadku regularnie zmieniających się rozkładów czasów asymptotyka zależy istotnie od asymptotyki rozkładu czasów. Podobną asymptotykę Autor otrzymuje dla rozkładów wolno zmieniających się przy dodatkowym założeniu na rozkład czasów. Dowód przypadku całkowalnych czasów i $\beta = 0$ (nie ma sumy) sprowadza się na rozłożenie supremum na trzy przedziały i skorzystaniu z asymptotyki na deterministycznym przedziale. Podobnie dla $\beta > 0$ czas rozłożony jest na odpowiednie odcinki wokół średniej czasu i skorzystaniu z asymptotyki na deterministycznym przedziale. W przypadku regularnie zmieniających się i wolno zmieniających się zmiennych losowych opisujących czas dowód jest oparty na rozbiciu na trzy przedziały i skorzystaniu z twierdzenia Karamaty z uwzględnieniem pewnych lematów opartych między innymi na wynikach z pracy Piterbarg [13] i Hüsler i Piterbarg [8].

Rozdział czwarty zajmuje się podobnie jak rozdział trzeci asymptotyką rozkładu przepełnienia bufora (zob. (1)) w przypadku gdy wejście do systemu opisane jest

procesem Lévy'ego spełniającym warunek Lundberga. Założenie to implikuje lekkie ogony rozkładów procesu Lévy'ego co powoduje, że jest to na ogół trudniejsze zadanie niż w przypadku ciężkich ogonów. Kandydat bada tu pewne uogólnienie funkcjonału supremum Θ tzn. zamiast rozpatrywania rozkładu funkcjonału supremum wprowadza pewien ogólniejszy funkcjonał, który może być między innymi supremum, infimum i ich kombinacją wypukłą na przedziale deterministycznym stałym lub rosnącym do nieskończoności. Na stałym odcinku czasu otrzymany wynik uogólnia asymptotyki otrzymane w Baurdoux i in. [3] wraz z uogólnieniem stałym Pickandsa dla procesów Lévy'ego i funkcjonału Θ . W dowodzie Autor wykorzystuje lemat Breimana mówiący o zachowaniu ogona rozkładu iloczynu pewnych dodatnich zmiennych losowych. Dla odcinka czasu rosnącego do nieskończoności wyprowadzona zostaje asymptotyka dla supremum (przepełnienie bufora) i jest ona analogiczna do wyników otrzymanych w pracy Piterbarga [13].

W ostatnim rozdziale pracy Autor uogólnia lemat Breimana mówiący o ogonie rozkładu iloczynu zmiennych losowych. Wielowymiarowy analog lematu Breimana ze zmiennymi zależnymi od poziomu u zostaje wyprowadzony, który jest rozszerzeniem wyniku zawartego w pracy Fougères i Mercadier [7]. W głównym wyniku tego rozdziału tw. 5.2.1 pojawia się podwójna indeksacja macierzy $\mathbf{M}$ i wektora $\mathbf{X}$ a mianowicie u, τ_u , gdzie τ_u należy do pewnego zbioru indeksów. Znaczenie tego podwójnego indeksu dopiero widać w założeniu A2. Korzystając z tw. 5.2.1 Kandydat podaje dowód rozszerzonej wersji twierdzenia podanego w Dębicki i in. ([5]). Twierdzenie to jest rozszerzone do większej klasy funkcjonałów niż tylko supremum dla pól gaussowskich. Z twierdzenia tego wynika lemat Pickandsa i lemat Piterbarga. Ponadto na podstawie uogólnionego lematu Breimana Autor znajduje asymptotykę prawdopodobieństwa supremum samostandaryzowanych (standaryzowanych losowo przez ostatnią wartość procesu na przedziale) pewnych procesów gaussowskich.

Szczegółowe uwagi:

- str. 12, lin. 9 - czy istnieje norma Skorochoda?
- str. 15 - nie opisano czym jest Σ_t ;
- str. 33, lin. 2 - suma do u^β , gdzie wartość nie jest całkowita (powtarza się w wielu miejscach);
- str. 56, lin. 15 - $\theta \in (-1 - \epsilon, 2 + \epsilon)$, dla ujemnych θ wartość oczekiwana jest zawsze skończona;
- str. 67 - należałoby zdefiniować co to jest indeks jednorodności miary μ ;
- str. 68, Prop. 5.1.1 - zapis całki z $d\mathbf{M}$ nie wydaje się poprawny, gdyż $\mathbf{M}$ jest ustaloną macierzą losową;
- str. 68, lin. 2 od dołu - „odwracalna macierz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times d}$ ”?, przekształcenie nie musi być odwracalne aby zdefiniować przeciwobraz zbioru;
- str. 74, lin. 11 od dołu - nie jest jasne zdanie „This framework...”

Pytania:

1. Czy w rozdziale drugim możliwe jest rozszerzenie wyników do skorelowanego dwuwymiarowego ruchu Browna ze zmienną w czasie korelacją pomiędzy składowymi np. zanikającą wykładniczo w nieskończoności?
2. Czy w rozdziale 3 losowy czas na którym obliczane jest prawdopodobieństwo przepełnienia bufora można przedstawić w prostszej postaci niekoniecznie jako sumę pewnych zmiennych losowych (byłoby to chyba naturalne i bliskie praktyki)? Skąd wziął się pomysł przedstawienia czasu jako sumy zmiennych losowych?
3. W pracy we wszystkich rozdziałach pojawiają się stałe w asymptotykach. Stałe te w większości przypadków są w postaci niejawnej ale np. w Przykładzie 3.2.3 w przypadku procesu Wienera Kandydat wyznacza wartości stałych asymptotycznych. Czy w innych przypadkach jest możliwe wyznaczenie tych stałych lub ich oszacowanie?

Podsumowanie.

Bibliografia rozprawy składa się ze 134 pozycji. Znajdują się wśród nich bieżące artykuły sprzed kilku lat opublikowane w najlepszych czasopismach z zakresu probabilistyki i procesów stochastycznych. Ponadto Autor cytuje pozycje książkowe R.J. Adlera [1], [2] czy V.I. Piterbarga [12].

Tak więc podsumowując, podjęta tematyka rozprawy jest bardzo ciekawa ze względu na to, że bazuje na procesach gaussowskich takich jak wielowymiarowy proces Wienera, ułamkowy ruch Browna czy procesy Lévy'ego, które są podstawowymi procesami stochastycznymi badanymi obecnie w różnych aspektach z teoretycznego punktu widzenia i ponadto wykorzystywanymi w wielu modelach w fizyce, biologii, ekonomii, ubezpieczeniach czy finansach. Doktorant wykazał się głęboką znajomością i umiejętnością zastosowania zaawansowanych metod i technik wykorzystywanych w teorii ekstremów procesów gaussowskich i procesów Lévy'ego. Zastosował i rozwinął te metody dla procesów wielowymiarowych co jest bardzo trudnym zadaniem z punktu widzenia analizy matematycznej funkcji wielu zmiennych. Ponadto dowody twierdzeń wymagały ponadprzeciętnych zdolności z zakresu analizy matematycznej i intuicji związanych z zachowaniem asymptotycznym funkcji i całek. Ponadto otrzymane rezultaty są ciekawe z punktu widzenia ekstremów procesów stochastycznych, analizy matematycznej jak i zastosowań w ubezpieczeniach czy kolejkach. Tematyka prezentowana w pracy jak i uzyskane wyniki otwierają wiele ścieżek do dalszych ciekawych i koniecznych badań w zakresie ekstremów gaussowskich procesów stochastycznych i procesów Lévy'ego.

Dorobek naukowy Doktoranta składa się z dwóch samodzielnych publikacji (Stochastic Models ([10]) i Silesian Statistical Review ([9])). Ponadto Doktorant prezentował swoje wyniki na 12 polskich lub międzynarodowych konferencjach i zajął dwukrotnie pierwsze miejsce i raz drugie miejsce w konkursie referatów studenckich.

Tak więc kończąc, rozprawa spełnia wymagania stawiane dysertacjom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Krzysztofa Kępczyńskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Bibliografia

- [1] R.J. Adler (1990) *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*. IMS.
- [2] [2] R.J. Adler, J.E. Taylor (2007) *Random fields and geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.
- [3] E.J. Baurdoux, Z. Palmowski, Z., M.R. Pistorius (2017) *On future drawdowns of Lévy processes*. Stochastic Processes and their Applications, **127**(8), 2679–2698.
- [4] S.M. Berman (1964) *Limit theorems for the maximum term in stationary sequences*. Ann. Math. Statist. **35**(2), 502–516.
- [5] K. Dębicki, E. Hashorva, P. Liu (2017) *Uniform tail approximation of homogeneous functionals of Gaussian fields*. Adv. Applied Probab, **49**(4) 1037–1066.
- [6] K. Dębicki, P. Liu (2016). *Extremes of stationary Gaussian storage models*. Extremes, **19**(2) 273–302.
- [7] A.L. Fougeres, C. Mercadier (2012) *Risk measures and multivariate extensions of Breiman's theorem*. Journal of Applied Probability, **49**(2) 364–384. [
- [8] J. Hüsler, V.I. Piterbarg, V. (2004) *Limit theorem for maximum of the storage process with fractional Brownian motion as input*. Stochastic Processes and their Applications, **114**(2) 231–250.
- [9] K. Kępczyński (2020) *Proportional reinsurance for fractional Brownian risk model*. Silesian Statistical Review, **18**(24) 149–162.
- [10] K. Kępczyński (2022) *Running supremum of Brownian motion in dimension 2: exact and asymptotic results*. Stochastic Models, **38** 116–129.
- [11] (1969) J. Pickands *Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes*. Trans. Amer. Math. Soc. **145**, 51–73.
- [12] V.I. Piterbarg (1996) *Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields*. Volume 148 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI.

- [13] V.I. Piterbarg (2001) *Large deviations of a storage process with fractional Brownian motion as input*. Extremes, 4(2), 147–164.

Z. Michna

Zbigniew Michna