

dr hab. Tomasz Kochanek
 Instytut Matematyki
 Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
 Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana mgr. Sebastiana Jachimka
 pt. *Combinatorial Banach spaces*

1. TEMATYKA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Rozprawa doktorska pana mgr. Sebastiana Jachimka została napisana pod kierunkiem pana dra hab. Piotra Borodulina-Nadziei, prof. UW, i dotyczy badania własności strukturalnych i geometrycznych tzw. kombinatorycznych przestrzeni Banacha. Przestrzenie te definiowane są jako uzupełnienia przestrzeni liniowej c_{00} rzeczywistych ciągów o skończonym nośniku, dla których norma określona jest przez wybór dziedzicznej (tj. zamkniętej na branie podzbiorów) rodziny $\mathcal{F}$ skończonych podzbiorów pokrywających pewien ustalony zbiór przeliczalny, najczęściej zbiór $\mathbb{N}$ nieujemnych liczb całkowitych, i wyraża się wzorem

$$(*) \quad \|x\|_{\mathcal{F}} = \sup_{A \in \mathcal{F}} \sum_{n \in A} |x(n)|.$$

Początki teorii tego typu przestrzeni Banacha sięgają klasycznej pracy J. Schreiera (*Studia Math.* 1930), w której rozważał normę zdefiniowaną wzorem $(*)$ dla rodziny $\mathcal{F}$ złożonej ze zbiorów $A \subset \mathbb{N}$, dla których $|A| \leq \min(A)$. Rodzina ta była później użyta przez A. Baernsteina (*Studia Math.* 1972) w celu skonstruowania refleksywnej przestrzeni Banacha nie mającej własności Banacha-Saksa. Termin *kombinatoryczne przestrzenie Banacha* zaproponowany został przez W.T. Gowersa, a w ostatnich latach teoria tych przestrzeni przeżywa dynamiczny rozwój dzięki pracom szerokiego grona matematyków, takich jak K. Beanland, P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas czy A. Pelczar-Barwacz. Rozprawa doktorska pana Sebastiana Jachimka, oparta w pewnej mierze na współpracy naukowej z wymienionymi wyżej osobami, stanowi bardzo cenny wkład w rozwój teorii kombinatorycznych przestrzeni Banacha. Istotnym *novum* w podejściu Doktoranta jest rozważanie rodzin $\mathcal{F}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, które – traktowane jako podzbiory zbioru Cantora $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ – nie muszą być zwarte w topologii produktowej. Przyjmowane są jedynie dwa naturalne założenia o rodzinie $\mathcal{F}$: jej dziedziczność oraz pokrywanie przez nią całego zbioru $\mathbb{N}$. Doktorant bada zatem w ogólności przestrzeń Banacha $X_{\mathcal{F}}$, która jest uzupełnieniem c_{00} względem normy $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ danej wzorem $(*)$, gdzie rodzina $\mathcal{F} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jest zamknięta na branie podzbiorów i pokrywa zbiór $\mathbb{N}$. Dotyczy to większości wyników zawartych w rozprawie, a tam, gdzie czynione jest założenie zwartości $\mathcal{F}$ (np. w rozdziale trzecim dotyczącym identyfikacji przestrzeni sprzężonej $X_{\mathcal{F}}^*$), jego przyjęcie podyktowane jest naturą problemu, i jest to szczegółowo uzasadnione w tekście rozprawy.

Główne problemy stawiane w rozprawie doktorskiej pana Jachimka dotyczą m.in.:

- wpływu kombinatorycznych własności rodziny $\mathcal{F}$ na cechy strukturalne przestrzeni Banacha $X_{\mathcal{F}}$ (uzyskano tu w szczególności interesujące przykłady ℓ_1 -nasyconych przestrzeni bez własności Schura);
- przedstawienia uniwersalnej przestrzeni Pelczyńskiego jako kombinatorycznej przestrzeni Banacha;
- izometrycznie izomorficznej identyfikacji przestrzeni sprzężonej do $X_{\mathcal{F}}$;
- opisu zbioru punktów ekstremalnych kuli jednostkowej przestrzeni $X_{\mathcal{F}}$.

Dowody twierdzeń zaprezentowanych w rozprawie wymagały zastosowania wielu pomysłów technicznych oraz metod z takich dziedzin jak teoria grafów, teoria modeli (granica Fraïsségo), przestrzenie quasi-unormowane, czy algebra liniowa. Praca napisana jest w języku angielskim. Poza drobnymi usterkami, które wymienię w dalszej części tekstu, jej redakcja stoi na wysokim poziomie, a wszystkie dowody przedstawione zostały w sposób czytelny i kompletny.

Rozprawa składa się ze wstępu oraz czterech rozdziałów, przy czym pierwszy poświęcony jest wprowadzeniu niezbędnych pojęć i znanych faktów wykorzystywanych w późniejszych fragmentach. Część rozprawy (głównie rozdziały drugi i trzeci) oparta jest na dwóch artykułach naukowych, których współautorem jest pan Jachimek:

- [J1] P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas, S. Jachimek, A. Pelczar-Barwacz, *The zoo of combinatorial Banach spaces*, *Studia Math.* **282** (2025), 101–132.
- [J2] P. Borodulin-Nadzieja, S. Jachimek, A. Pelczar-Barwacz *On the spaces dual to combinatorial Banach spaces*, *Math. Nachr.* **298** (2025), 998–1017.

2. GŁÓWNE TEZY I OCENA ROZPRAWY

Wyniki zawarte w artykule [J1] omówione są w drugim rozdziale rozprawy. Autor prezentuje tutaj szereg interesujących przykładów kombinatorycznych przestrzeni Banacha, rozpoczynając od omówienia sytuacji, w której otrzymujemy klasyczne przestrzenie c_0 , ℓ_1 , przestrzeń Schreiera, a także pewne przestrzenie ciągów indeksowanych elementami drzewa $2^{<\mathbb{N}}$ wprowadzone przez Rosenthala, w szczególności przestrzeń momentów stopu (*stopping time space*). Doktorant przechodzi następnie do uogólnienia przestrzeni Faraha, rozważając rodziny

$$F_g = \{A \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : |A \cap [2^n, 2^{n+1})| \leq g(n)\},$$

gdzie $g: \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$ jest dowolną funkcją. Uogólniając wynik uzyskany przez P. Borodulina-Nadzieję i B. Farkasa (*J. Funct. Anal.* 2020) dla oryginalnej przestrzeni Faraha, odpowiadającej funkcji $g(n) = 2^n/n$, Doktorant dowodzi, że dla dowolnej g przestrzeń X_{F_g} ma własność Schura, co prowadzi do wniosku, w celu wysłowienia którego przytoczymy tutaj kilka definicji. Jeżeli $\varphi: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, \infty]$ jest monotoniczną, półciągłą z dołu quasi-normą, skończoną na ciągach należących do c_{00} , to określamy

$$\text{FIN}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \varphi(x) < \infty\} \quad \text{oraz} \quad \text{EXH}(\varphi) = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \varphi(P_{[n,\infty)}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right\},$$

gdzie $P_I: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ oznacza kanoniczną projekcję na współrzędne ze zbioru I . W szczególności $X_{\mathcal{F}} = \text{EXH}(\|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ dla φ będącej normą zadaną wzorem (*); definiujemy także

przestrzeń $Z_{\mathcal{F}} = \text{FIN}(\|\cdot\|_{\mathcal{F}})$. Jeden z wyników wspomnianej pracy P. Borodulina-Nadziei i B. Farkasa mówi, że $\text{EXH}(\varphi) = \text{FIN}(\varphi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{EXH}(\varphi)$ nie zawiera izomorficznej kopii c_0 . Wykazana przez Autora własność Schura przestrzeni X_{F_g} implikuje więc, że dla dowolnej funkcji g mamy $X_{F_g} = Z_{F_g}$. Doktorant pokazuje dalej, że jeżeli funkcje $g, h: \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$ mają ten sam wzrost asymptotyczny, to $X_{F_g} \sim X_{F_h}$, tzn. przestrzenie te są izomorficzne. Zaznacza on również, że problem pełnej charakteryzacji warunku $X_{F_g} \sim X_{F_h}$ w języku funkcji g i h pozostaje otwarty.

W dalszej części rozdziału drugiego Autor proponuje pewne modyfikacje przestrzeni Faraha. Okazuje się, że nawet pozornie drobna zmiana w definicji rodziny F_g , mianowicie rozważenie

$$IF = \{F \cup E: F \in \mathbf{F}, E \subseteq [2^n, 2^{n+1}) \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\},$$

gdzie $\mathbf{F} = F_g$ dla funkcji $g(n) = 2^n/n$, prowadzi do przestrzeni zawierającej kopię c_0 . Kolejna, bardzo ciekawa modyfikacja polega na rozważeniu rodziny $\mathbf{RF}$ złożonej ze zbiorów $A \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ spełniających $|A \cap [2^{\sigma(n)}, 2^{\sigma(n)+1})| \leq 2^{\sigma(n)}/n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ oraz pewnego ustalonego, ściśle rosnącego ciągu $(\sigma(k))_{k \in \mathbb{N}_+}$ liczb całkowitych dodatnich. Jak pokazuje Doktorant, odpowiadająca tej klasie przestrzeń $X_{\mathbf{RF}}$ nie ma własności Schura, mimo że jest ℓ_1 -nasycona. Dowód tego twierdzenia jest dalece nietrywialny.

Końcowa część rozdziału drugiego poświęcona jest zagadnieniom związanym z uniwersalnością. Dla dowolnej przestrzeni Banacha Y z 1-bezwarunkową bazą (y_n) Autor konstruuje rodzinę $\mathcal{F} \subset [\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}]^{<\infty}$ o tej własności, że przestrzeń $X_{\mathcal{F}}$ zawiera komplementarny, blokowy ciąg bazowy (względem bazy kanonicznej) równoważny bazie (y_n) . Biorąc w szczególności $Y = \ell_2$, Autor zauważa, że o ile w klasie kombinatorycznych przestrzeni Banacha nasycenie przestrzeni c_0 jest równoważne niezawieraniu kopii ℓ_1 , o tyle niezawieranie kopii c_0 nie implikuje nasycenia przestrzeni ℓ_1 . Na zakończenie rozdziału drugiego, korzystając z teorii granic Fraïsségo, Doktorant podaje konstrukcję rodziny $\mathcal{P}$, dla której przestrzeń kombinatoryczna $X_{\mathcal{P}}$ jest izomorficzna z przestrzenią Pełczyńskiego, która jest komplementarnie uniwersalna dla klasy przestrzeni Banacha z bazą bezwarunkową.

Moje uwagi dotyczące tego rozdziału są następujące:

- Na str. 23, w wierszu 9. od dołu powinno być $|C_{n_m}|$.
- Skoro na początku sekcji 2.3 rozważamy przestrzenie złożone z ciągów indeksowanych elementami drzewa $2^{<\mathbb{N}}$, to ze względów formalnych należało wcześniej wprowadzić definicję przestrzeni kombinatorycznych dla rodzin $\mathcal{F} \subset [I]^{<\infty}$, gdzie I jest dowolnym zbiorem przeliczalnym.
- Na str. 25, w wierszu 9. od dołu oznaczenie $(e_n)_{n \in D}$ jest niefortunne, bo indeksami są elementy zbioru $2^{<\mathbb{N}}$.
- W dowodzie twierdzenia 2.4.1 mamy $B_n \subseteq I_n$, a zatem wzór na normę $\|x_{n_k}\|$ w wierszu 8. na str. 27 nie musi zachodzić w sytuacji, gdy nośnik x_{n_k} przecina się niepusto z większą liczbą przedziałów I_n . Biorąc to pod uwagę, w oszacowaniu w przedostatnim wierszu dowodu powinna pojawić się suma postaci

$$\sum_{\{n: I_n \cap A_{n_l} \neq \emptyset\}} \sum_{j \in B_n^l} |x_{n_l}(j)|,$$

co oczywiście nie wpływa na resztę dowodu.

- W zdaniu zaczynającym się na str. 27, w wierszu 7. od dołu, chodzi zapewne o to, aby dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $k \in I_n$, $k < 2^{n+1} - 1$ zachodziła nierówność $|x(\sigma(k))| \geq |x(\sigma(k+1))|$.
- Na str. 27, w wierszu 4. od dołu, jak i w wielu innych miejscach rozprawy, Autor zastępuje orzeczenie słowne symbolem matematycznym (takim jak $=$, $\leq$). Jest to praktyka dopuszczalna, ale w takim przypadku bezwzględnie konieczne jest oddzielenie przecinkiem frazy wprowadzającej od formuły, np.: „(...) for every function $\psi: \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$, $\|x\|_{F_\psi} = \|y\|_{F_\psi}$ ”.
- Użycie symbolu podłogi w sformułowaniu warunku z Proposition 2.4.3 jest zbędne – warunek istnienia dodatnich stałych c_1, c_2 spełniających $c_1 \leq \lfloor g(n) \rfloor / \lfloor h(n) \rfloor \leq c_2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest równoważny istnieniu dodatnich stałych c'_1, c'_2 spełniających $c'_1 \leq g(n)/h(n) \leq c'_2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Mamy np. $g(n) - 1 < \lfloor g(n) \rfloor \leq c_2 h(n)$, skąd $g(n) < (c_2 + 1)h(n)$.
- Na str. 29 Autor odwołuje się do „Definition 2.4”, której w rozprawie nie ma.
- Na str. 31, w wierszu 8. powinno być: „(...) we define a norm $\|\cdot\|_{n,l}$ ”.

Rozdział trzeci poświęcony jest opisowi i badaniom struktury przestrzeni sprzężonej do kombinatorycznej przestrzeni Banacha. Jest to niełatwe zagadnienie z uwagi na brak prostego opisu normy dualnej do $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$. W rozdziale tym Autor odchodzi od wcześniejszej ogólności i zakłada zwartość rodziny $\mathcal{F}$ (oraz, jak wcześniej, jej dziedziczność i pokrywanie $\mathbb{N}$). Przypadek rodziny niezwanej jest kłopotliwy z uwagi na to, że kanoniczna baza (e_n) przestrzeni $X_{\mathcal{F}}$ nie jest wówczas bazą zwężającą. Jeżeli przyjmiemy jednak założenie zwartości, to - jak pokazuje Doktorant - kluczem do zrozumienia struktury $X_{\mathcal{F}}^*$ jest formuła

$$(**) \quad \|x\|^{\mathcal{F}} = \inf \left\{ \sum_{A \in \mathcal{P}} \sup_{n \in A} |x(n)| : \mathcal{P} \subset \mathcal{F} \text{ jest podziałem } \mathbb{N} \right\},$$

w pewnym sensie „dualna” do wzoru (*). Formuła ta nie definiuje na ogół normy, a jedynie quasi-normę spełniającą nierówność trójkąta z modułem wklęsłości równym co najwyżej 2. Z tego powodu Autor rozważa otoczkę Banacha $\hat{X}^{\mathcal{F}}$ przestrzeni $(X^{\mathcal{F}}, \|\cdot\|^{\mathcal{F}})$ ($X^{\mathcal{F}}$ jest tutaj uzupełnieniem c_{00} względem normy $\|\cdot\|^{\mathcal{F}}$) wyposażoną w normę określoną standardowym wzorem

$$\|x\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|^{\mathcal{F}} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}.$$

Główne twierdzenie rozdziału mówi, że dla dowolnej zwartej, dziedzicznej i pokrywającej rodziny $\mathcal{F} \subset [\mathbb{N}]^{<\infty}$ przestrzeń $\hat{X}^{\mathcal{F}}$ jest izometrycznie izomorficzna z $X_{\mathcal{F}}^*$. W szczególnym przypadku, gdy $\mathcal{F}$ jest dziedzicznym domknięciem pewnej partycji $\mathcal{P}$ zbioru $\mathbb{N}$, wzór (**) wyraża normę i mamy wówczas izometryczny izomorfizm $X_{\mathcal{F}}^* \cong X^{\mathcal{F}}$. Dla drugiego dualu zachodzi jednak $X_{\mathcal{F}}^{**} \cong (X^{\mathcal{F}})^*$ dla każdej zwartej, dziedzicznej i pokrywającej rodziny $\mathcal{F}$.

Również w kontekście przestrzeni $X^{\mathcal{F}}$ Autor uzyskuje efekt, który pojawił się już w poprzednim rozdziale – dowodzi on mianowicie, że dla *dużych* rodzin $\mathcal{F} \subset [\mathbb{N}]^{<\infty}$, tj. takich, że $\mathcal{F} \cap [M]^n \neq \emptyset$ dla dowolnego nieskończonego zbioru $M \subset \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, przestrzeń $X^{\mathcal{F}}$ nie ma własności Schura, mimo że jest ℓ_1 -nasycona.

Moje uwagi dotyczące rozdziału trzeciego są następujące:

- Na str. 45, w wierszu 5. od dołu pojawia się symbol P_0 , który nie jest określony. Powinno być:

$$R_{2n-1} = P_n \setminus \bigcup_{i < 2n-1} R_i \quad \text{dla } 1 \leq n \leq k.$$

th

- Nie jest jasne, dlaczego twierdzenie 3.1.5(a) miaoby prosto prowadzić do wniosku 3.1.8 (zob. uwaga w wierszu 9. na str. 47). Wniosek ten wynika bezpośrednio z definicji, a dokładniej – ze wzoru na dole strony 42.
- Na str. 49, w wierszach 4. i 5. proponowałbym użyć standardowych oznaczeń $(c_{00}, \|\cdot\|^{\mathcal{F}})$ oraz $(c_{00}, \|\cdot\| \cdot \|\cdot\|^{\mathcal{F}})$.

Ostatnia część rozprawy poświęcona jest badaniu postaci punktów ekstremalnych kuli jednostkowej przestrzeni $X_{\mathcal{F}}$ oraz $X_{\mathcal{F}}^*$. Dla przestrzeni sprzężonej $X_{\mathcal{F}}^*$, gdzie $\mathcal{F}$ jest rodziną zwartą, opis punktów ekstremalnych został podany (bez dowodu) przez Gowersa – są to wektory postaci $\sum_{i \in F} \varepsilon_i e_i^*$, gdzie $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $F \in \mathcal{F}_{\max}$ (czyli jest maksymalnym elementem rodziny $\mathcal{F}$), a (e_i^*) to ciąg funkcjonałów biortogonalnych do bazy kanonicznej (e_i) . Celem czwartego rozdziału jest wykazanie, że analogiczny opis zachodzi dla ogólnych przestrzeni $X_{\mathcal{F}}^*$, mianowicie – że dla każdej dziedzicznej i pokrywającej rodziny $\mathcal{F}$ zbiór $\text{Ext}(X_{\mathcal{F}}^*)$ punktów ekstremalnych kuli jednostkowej $X_{\mathcal{F}}^*$ składa się dokładnie z ciągów $x \in \mathbb{R}^N$, których niezerowe wartości to wyłącznie ± 1 , i dla których $\text{supp}(x) \in \overline{\mathcal{F}}_{\max}$. Pan Jachimek podaje także dokładny opis zbioru $\text{Ext}(X_{F_g})$ dla uogólnionej przestrzeni Faraha, a następnie przechodzi do badania punktów ekstremalnych kuli jednostkowej przestrzeni Z_G , która odpowiada rodzinie $\mathcal{F} = \mathcal{C}_G$ złożonej z maksymalnych klik danego przeliczalnego grafu nieskierowanego G (w przypadku grafu skończonego mamy oczywiście $X_G = Z_G$). Dowodzi on, że jeżeli G jest grafem doskonałym, to $\text{Ext}(Z_G)$ składa się z wektorów o współrzędnych ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$, których nośnik jest maksymalną antykliką grafu G . Kluczową rolę w tym opisie odgrywa rezultat Chvátala związany z twierdzeniem Lovásza charakteryzującym grafy doskonałe.

W klasie grafów niedoskonałych Doktorant bada dwa kanoniczne ich rodzaje: dziury i antydziury o nieparzystej długości równej co najmniej 5, podając w obydwu przypadkach jawny opis odpowiedniego zbioru $\text{Ext}(X_G)$. Modyfikując nieznacznie wspomniane wyżej grafy niedoskonałe, Doktorant wyprowadza interesujący wniosek mówiący, że w ogólności wektory ze zbioru $\text{Ext}(X_G)$ mogą mieć współrzędne będące dowolnymi liczbami wymiernymi z przedziału $(0, 1)$. Wskazuje to, że nawet w klasie dość prostych grafów nie możemy spodziewać się ogólnej, „kanonicznej” postaci punktów ekstremalnych kuli X_G . Pokazuje to także *explicite* pomysłowy algorytm zaprezentowany pod koniec rozprawy.

Odnosnie do tej części rozprawy mam następujące uwagi:

- W dowodzie lematu 4.0.3, w nierównościach (4.2), powinno być $-S(\alpha, A_1)$ zamiast $-S(\lambda, A_1)$. Poprawka ta odnosi się także do odpowiednich miejsc w dalszej części dowodu.
- W wypowiedzi Proposition 4.1.1 powinno być $\text{Ext}(X_{\mathcal{F}}^*)$.
- Równość umieszczona w ostatnim wierszu strony 67 nie jest poprawna. Właściwe zastosowanie twierdzenia Milmana powinno wyglądać następująco: „*Since $(X_{\mathcal{F}}^*, w^*)$ is locally convex and $W(\overline{\mathcal{F}})$ is weak*-compact, by Milman’s theorem, we obtain $\text{Ext}(X_{\mathcal{F}}^*) \subseteq W(\overline{\mathcal{F}})$.*”
- Powołanie się na lemat 4.0.3 w 4. wierszu dowodu Proposition 4.2.5 jest zbędne, skoro mamy $|\sum_{j \in A} (x(j) \pm \varepsilon_j)| \leq 1$ oraz $\sum_{j \in A} x(j) = 1$.

3. KONKLUZJA

Uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska pana mgr. Sebastiana Jachimka reprezentuje wysoki poziom naukowy i niewątpliwie zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Doktorant uzyskał szereg nietrywialnych wyników dotyczących wielu naturalnych własności kombinatorycznych przestrzeni Banacha. Zaprezentowane w rozprawie techniki dowodowe pokazują szeroki wachlarz umiejętności Doktoranta. Rozprawa pana mgr. Sebastiana Jachimka z pewnością spełnia wymagania ustawowe, opisane w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, jak i wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim.

Z pełnym przekonaniem wnoszę zatem o dopuszczenie pana mgr. Sebastiana Jachimka do publicznej obrony rozprawy doktorskiej.



Tomasz Kochanek