dr hab. Tomasz Kania, prof. UJ
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
tomasz2.kania@uj.edu.pl

Katowice, 6 maja 2026 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Macieja Korpalskiego

O izomorficznych i geometrycznych własnościach przestrzeni Banacha funkcji ciągłych

On isomorphic and geometric properties of Banach spaces of continuous functions

Rozprawa doktorska mgr. Macieja Korpalskiego została przygotowana w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego pod kierunkiem prof. Grzegorza Plebanka. Praca liczy 85 stron pliku, zawiera streszczenia w języku polskim i angielskim, wstęp, część z notacją i terminologią, trzy zasadnicze rozdziały matematyczne, dodatek obliczeniowy, bibliografię obejmującą 88 pozycji oraz indeksy. Rozprawa napisana jest po angielsku i dotyczy izomorficznych oraz geometrycznych własności przestrzeni Banacha postaci $\mathrm{C}(K)$, gdzie K jest przestrzenią zwartą, najczęściej zwartą prostą albo iloczynem takich przestrzeni.

Już na wstępie chcę podkreślić, że moja ogólna ocena rozprawy jest bardzo wysoka. Praca podejmuje kilka trudnych, aktualnych i naturalnych problemów z teorii przestrzeni Banacha funkcji ciągłych. Lista technik wykorzystywanych w rozprawie obejmuje metody analizy funkcjonalnej, topologii ogólnej i mnogościowej, teorii miary, teorii mnogości, algebr Boole'a oraz kombinatoryki nieskończonej. Rozprawa nie jest jedynie kompilacją znanych technik, ale przedstawia zestaw oryginalnych wyników, które w mojej ocenie wnoszą realny wkład do badanej dziedziny.

Na szczególne podkreślenie zasługuje dorobek naukowy Doktoranta. Przedłożona rozprawa opiera się na rezultatach związanych z pracami opublikowanymi w *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* oraz w *Fundamenta Mathematicae*, a także na kilku dalszych preprintach. Praca *How many miles from L_∞ to ℓ_∞?*, wspólna z Grzegorzem Plebankiem, została przyjęta do druku w *Proceedings of the American Mathematical Society*. Załączony życiorys pokazuje ponadto aktywność konferencyjną, wyjazdy naukowe i nowe projekty badawcze. Jest to dorobek nietypowo obszerny jak na etap doktoratu, zwłaszcza że obejmuje zarówno wyniki samodzielne, jak i współautorskie z uznanymi specjalistami. Na uznanie zasługuje także umiejętność współpracy z innymi matematykami, widoczna w pracach i projektach z Antonio Avilésem, Grzegorzem Plebankiem, Piotrem Koszmiderem i Witoldem Marciszewskim. Dołączone oświadczenia współautorów potwierdzają istotny, a w pewnych miejscach kluczowy wkład Doktoranta w uzyskane rezultaty.

Omówienie rozprawy i wybranych wyników

Rozprawa rozpoczyna się od obszernego wprowadzenia, które jasno lokuje wyniki Doktoranta w klasycznej i współczesnej teorii przestrzeni $\mathrm{C}(K)$. Autor przypomina podstawowe twierdzenia klasyfikacyjne Bessagi–Pełczyńskiego i Miljutina, a następnie wyjaśnia, dlaczego w przypadku niemetryzowalnym naturalnie pojawiają się metody topologii ogólnej, teorii miary i teorii mnogości. Już we wstępie dobrze zarysowane są trzy główne wątki rozprawy: przeliczalne dyskretne rozszerzenia zwartych prostych, pochodna Semadeniego–Pełczyńskiego oraz odległość Banacha–Mazura między przestrzeniami funkcji ciągłych. Taki układ pozwala czytelnikowi od razu zobaczyć, że praca nie jest zbiorem luźnych rezultatów, lecz spójnym projektem dotyczącym izomorficznych i geometrycznych własności przestrzeni $\mathrm{C}(K)$.

Rozdział drugi ma charakter przygotowawczy, ale jest ważny dla samodzielności tekstu. Zebrano w nim notację z teorii mnogości, topologii, teorii zwartych prostych i teorii przestrzeni Banacha. Szczególnie użyteczne są przypomnienia dotyczące zwartych prostych, przestrzeni $\mathrm{C}(K)$, miar Radona, oscylacji funkcji oraz operatorów rozszerzania. Ta część pokazuje, że autor świadomie prowadzi czytelnika przez narzędzia, które później będą pracować w dowodach, zamiast odsyłać do literatury przy każdej definicji.

Rozdział trzeci dotyczy przeliczalnych dyskretnych rozszerzeń zwartych prostych oraz operatorów rozszerzania $E : \mathrm{C}(K) \to \mathrm{C}(L)$. Autor bada własności oznaczane przez (R) i (E), związane odpowiednio z istnieniem retrakcji i z istnieniem ograniczonego operatora rozszerzania. Tematyka ta jest naturalnie powiązana z problematyką sum skrętnych przestrzeni Banacha, w szczególności ze znanym problemem Cabello-Sáncheza, Castillo, Kaltona i Yosta dotyczącym nietrywialnych sum skrętnych c_0 oraz $\mathrm{C}(K)$.

Najciekawszym elementem tego rozdziału jest przełożenie problemu analitycznego na język prawie łańcuchów rzeczywistych i ich alternacji. Autor pokazuje, że normy operatorów rozszerzania są kontrolowane przez struktury kombinatoryczne podobne do luk. Bardziej konkretnie, otrzymuje następujące wyniki. Jeżeli K jest zwartą prostą i $L \in CDE(K)$, to z nierówności $\eta(K, L) < 3$ wynika istnienie retrakcji $L \to K$, a więc $\eta(K, L) = 1$. Dalej, z warunku $\eta(K, L) < 5$ autor wyprowadza istnienie operatora rozszerzania o normie co najwyżej 3. Następnie konstruuje, dla każdej niemetryzowalnej ośrodkowej zwartej prostej K, przeliczalne dyskretne rozszerzenie L takie, że $\eta(K, L) = 3$. Wynik ten bardzo dobrze ilustruje subtelność zjawiska: własność (E) zachodzi, ale nie pochodzi z retrakcji.

W tym samym rozdziale autor uzyskuje wyniki o charakterze niezależnościowym. Pod aksjomatem Martina $MA(\kappa)$, dla ośrodkowej zwartej prostej K wagi κ każde przeliczalne dyskretne rozszerzenie ma własność (E), a nawet dopuszcza operator rozszerzania o normie co najwyżej 3. Z drugiej strony, gdy waga K jest nie mniejsza niż $\mathrm{non}(\mathcal{I})$, gdzie $\mathcal{I}$ jest ideałem generowanym przez domknięte zbiory miary zero, otrzymuje się rozszerzenie bez własności (E). Jest to bardzo interesujące połączenie teorii przestrzeni Banacha z kombinatoryką podzbiorów ω i z klasycznymi niezmiennikami kardynalnymi poniżej continuum.

Rozdział czwarty wprowadza i rozwija pojęcie pochodnej Semadeniego-Pełczyńskiego oraz odpowiadającego jej wymiaru. Jest to narzędzie izomorficzne pozwalające rozróżniać przestrzenie funkcji ciągłych na iloczynach niemetryzowalnych zwartych prostych. Autor udowadnia, że dla skończonego iloczynu zwartych prostych liczba czynników o charakterze większym niż rozważana liczba kardynalna jest niezmiennikiem izomorficznym odpowiedniej przestrzeni $\mathrm{C}(K)$. W konsekwencji otrzymuje się twierdzenia o braku zanurzeń izomorficznych i o braku liniowych surjekcji między pewnymi naturalnymi przestrzeniami funkcji ciągłych.

Warto podać ten wynik dokładniej. Dla klasy $\mathcal{C}^n_\kappa$ iloczynów zwartych prostych z dokładnie n czynnikami o charakterze większym niż κ autor dowodzi równości

$$sp_\kappa(\mathrm{C}(K)) = n \qquad (K \in \mathcal{C}^n_\kappa).$$

Stąd, jeśli $K \in \mathcal{C}^n_\kappa$, $L \in \mathcal{C}^m_\kappa$ i $n > m$, to $\mathrm{C}(K)$ nie zanurza się izomorficznie w $\mathrm{C}(L)$ oraz nie ma ciągłej liniowej surjekcji $\mathrm{C}(L) \twoheadrightarrow \mathrm{C}(K)$. W szczególności dla zwartych prostych $K_1, \ldots, K_n, L_1, \ldots, L_m$ o nieprzeliczalnym charakterze i $n > m$ nie istnieje zanurzenie

$$\mathrm{C}\left(\prod_{i=1}^{n} K_i\right) \hookrightarrow \mathrm{C}\left(\prod_{j=1}^{m} L_j\right),$$

ani surjekcja w kierunku przeciwnym. Uważam ten rozdział za bardzo udany koncepcyjnie: wprowadzenie nowej wersji pochodnej, sprawdzenie jej podstawowych własności funktorialnych, a następnie zastosowanie jej do iloczynów zwartych prostych tworzy spójną i elegancką całość.

Rozdział piąty poświęcony jest odległości Banacha-Mazura między pewnymi przestrzeniami $\mathrm{C}(K)$. Autor rozważa zarówno przypadek przeliczalnych przestrzeni zwartych, jak i przypadek klasycznych przestrzeni ℓ_∞ oraz $L_\infty[0,1]$. Dla przestrzeni przeliczalnych otrzymuje dolne oszacowania odległości od $\mathrm{C}[0,\omega]$, w tym oszacowania w duchu klasycznych prac Gordona oraz nowszych prac Gergonta i Piaseckiego. Przykładowo, jeżeli $K^{(m)} \neq \emptyset$ dla $m \geqslant 2$, to rozprawa dowodzi dolnego ograniczenia

$$d_{\mathrm{BM}}\big(\mathrm{C}(K), \mathrm{C}[0,\omega]\big) \geqslant m + \sqrt{(m-1)(m+3)}.$$

Dla przestrzeni $K = [0,\omega] \times 3$ autor uzyskuje również oszacowanie

$$3.4704 < d_{\mathrm{BM}}\big(\mathrm{C}([0,\omega] \times 3), \mathrm{C}[0,\omega]\big) \leqslant \frac{4 + \sqrt[3]{73 - 6\sqrt{87}} + \sqrt[3]{73 + 6\sqrt{87}}}{3},$$

przy czym górna granica wynosi około 3.87512. Jest to bardzo konkretny i nietrywialny wkład w pytanie Bessagi i Pełczyńskiego o odległości Banacha-Mazura między przestrzeniami funkcji ciągłych na przeliczalnych przestrzeniach zwartych. Warto odnotować, że niedawny preprint M. Cútha, J. Havelki, J. Rondoša i B. Sarıego *The classification of* $\mathrm{C}(K)$ *spaces for countable compacta by positive isomorphisms*, `https://arxiv.org/abs/2601.11463`, wyraźnie wspomina wspólne wyniki Doktoranta z G. Plebankiem jako najnowszy postęp w problemie wyznaczenia wartości $D_3 = d_{\mathrm{BM}}(\mathrm{C}(\omega), \mathrm{C}(\omega \cdot 3))$. Pokazuje to, że wyniki Doktoranta są już zauważane i wykorzystywane w bieżącej literaturze.

Część dotycząca ℓ_∞ i $L_\infty[0,1]$ jest ambitna. Już samo uzyskiwanie sensownych dolnych ograniczeń dla odległości Banacha-Mazura w tak klasycznym, ale trudnym przypadku, wymaga dużej pomysłowości. Autor łączy opis dualu L_∞ przez miary skończenie addytywne z argumentami typu normującego oraz z analizą metody dekompozycyjnej Pełczyńskiego. W rozprawie pojawia się oszacowanie

$$7.41 < d_{\mathrm{BM}}\big(\ell_\infty, L_\infty[0,1]\big) \leqslant (3+\sqrt{2})^2 < 19.49.$$

Warto tu dodać, że przyjęta do druku praca *How many miles from* L_∞ *to* ℓ_∞*?* stała się jednym z impulsów do późniejszej pracy G. Lewickiego i recenzenta (λ^+)*-injective Banach spaces*, `https://arxiv.org/abs/2603.09710`, w której górne ograniczenie na $d_{\mathrm{BM}}(\ell_\infty, L_\infty[0,1])$ poprawiono do $9+6\sqrt{3}$. Nawet jeżeli precyzyjne stałe mogą w przyszłości zostać dalej poprawione, przedstawione podejście jest wartościowe i już wywołało dalszy rozwój badań.

Ocena dojrzałości naukowej

Rozprawa pokazuje bardzo dobrą orientację autora w szerokim zakresie literatury. Autor swobodnie porusza się pomiędzy zagadnieniami z topologii zwartych prostych, algebr Boole'a, teorii miary, teorii mnogości i klasycznej teorii przestrzeni Banacha. Taka interdyscyplinarność jest w przypadku przestrzeni $\mathrm{C}(K)$ konieczna, ale nie jest łatwa do opanowania. W pracy widać, że Doktorant potrafi samodzielnie formułować problemy, znajdować odpowiednie modele kombinatoryczne, korzystać z klasycznych twierdzeń i tworzyć nowe narzędzia.

Styl rozprawy jest na ogół bardzo przyjazny czytelnikowi. Autor dobrze motywuje wprowadzane pojęcia, a struktura pracy jest logiczna. Język angielski oceniam pozytywnie: tekst jest zrozumiały, naturalny i znacznie lepszy niż przeciętny angielski spotykany w rozprawach doktorskich z matematyki. Występują drobne potknięcia gramatyczne i redakcyjne, które wypisuję niżej, ale nie zmieniają one bardzo dobrej ogólnej oceny sposobu przedstawienia materiału; wszak nie robi błędów ten, kto niczego nie robi.

Uwagi krytyczne

Poniższe uwagi odnoszą się do numeracji stron pliku PDF. Część z nich dotyczy lokalnych luk w dowodach, część literówek matematycznych, a część zbyt skrótowych argumentów. Uważam, że są to uwagi istotne redakcyjnie i matematycznie, natomiast w większości są one naprawialne bez zmiany głównych idei rozprawy. W dalszej części recenzji słowa „Stwierdzenie” używam jako polskiego odpowiednika angielskiego terminu *proposition*.

1. **Twierdzenie 3.3.3, s. 25.** W kroku 1 napisano, że wystarczy zauważyć
$$\lim_{n\in I} \int_K f\, d\mu_n = 1.$$
Nie daje to sprzeczności, ponieważ właśnie taki wniosek wynikałby z założonej zbieżności słabej*. Potrzebne jest tu rzeczywiste oszacowanie od góry, prowadzące do sprzeczności, na przykład oszacowanie typu $\int f\, d\mu_n \leqslant 1 - \varepsilon$. Kroki 4 i 5 są również zapisane zbyt skrótowo; zwłaszcza krok 5, odsyłający do „pozostałych przypadków”, powinien zostać rozpisany.

2. **Twierdzenie 3.3.4, s. 26.** Dowód ogólnego twierdzenia, że $\eta(K, L)$ jest liczbą nieparzystą albo nieskończonością, jest tylko szkicem. Sam pomysł jest bardzo wiarygodny i zgodny z wcześniejszymi argumentami, ale w rozprawie doktorskiej twierdzenie tej rangi powinno mieć pełny dowód albo być wyraźnie oznaczone jako szkic uogólnienia.

3. **Twierdzenie 3.6.3, s. 35.** W końcowym fragmencie dowodu pojawia się operator
$$E = S_2^{-1} E' S_1.$$
Aby ten wzór miał sens, trzeba sprawdzić, że $E' S_1 f$ należy do obrazu izometrycznego zanurzenia S_2, czyli że jest stały na odpowiednich włóknach retrakcji. W tekście nie widzę uzasadnienia tej własności. Jest to luka lokalna, ale wymaga dopisania.

4. **Lemat 3.7.1, s. 35.** Definicja
$$C_x = \{n : |\mu_n(A_x) - \delta_n(A_x)| < 1/4\}$$
nie może być poprawna, ponieważ z założenia zbieżności wynikałoby raczej, że taki zbiór jest kofiniczny. W argumentacji potrzebne jest zapewne
$$C_x = \{n : |\mu_n(A_x) - 1| < 1/4\}$$
albo równoważna definicja śledząca przynależność n do A_x. To wygląda na błąd zapisu, lecz w obecnej postaci zmienia sens dowodu.

5. **Twierdzenie 3.7.2, s. 37–38.** W dowodzie wybrany jest zbiór $F = X_{n_0}$ i następnie stosuje się do niego argument gęstościowy. Tymczasem X_{n_0} nie musi być domknięty ani mierzalny w wymaganym sensie. Prawdopodobna poprawka polega na przejściu do odpowiedniego domknięcia lub do zwartego podzbioru dodatniej miary. Ponadto w końcówce dowodu występuje przesunięcie indeksów: podział na k przedziałów daje elementy $x_0, \ldots, x_{k-1}$, a założenie lematu wymaga alternacji o właściwie dobranej długości. Jest to poprawialne, ale wymaga uporządkowania.

6. **Fakt 4.2.4, s. 42.** Stwierdzenie, że punkt charakteru większego niż κ zawiera kopię $[0, \kappa^+]$ zbieżną do tego punktu, jest zbyt mocne w podanej postaci. Gdy jednostronna współkońcowość punktu jest większa niż κ^+, nie ma powodu, by istniał taki dokładny podciąg współkońcowy typu κ^+. Potrzebne jest osłabienie sformułowania albo dodatkowe założenie o współkońcowości.

7. **Lemat 4.3.4, s. 44.** W części dotyczącej zanurzeń pojawia się niewłaściwa stała: zamiast $\|T^{-1}\|$ powinno występować $1/\|T^{-1}\|$, gdy przechodzi się od normy w obrazie do normy w dziedzinie. Ponadto zdanie „jeżeli $T^{**}x^{**} \in Y$, to $x^{**} \in X$” nie jest prawdziwe dla dowolnego operatora T; wymaga założenia, że T jest zanurzeniem, i powinno być sformułowane właśnie w tym kontekście.

8. **Stwierdzenie 4.3.9, s. 45.** W definicji wymiaru sp_κ pojawia się pochodna $\mathrm{SP}_\kappa^{(n+1)}$, natomiast w dowodzie użyto $\mathrm{SP}_\kappa^{(n)}$. Wygląda to na błąd o jeden indeks. Przypadek $n = -1$ także powinien zostać potraktowany osobno.

9. **Lemat 4.4.3, s. 47.** Utożsamienie izometryczne $\mathrm{SP}_\kappa(\mathrm{C}(K))$ z $c_0(K^\uparrow)$ wymaga korekty. Jeśli punkt jest niedostępny z obu stron, odpowiadające włókno w uzupełnieniu ma trzy punkty i norma ilorazowa nie jest po prostu maksimum dwóch różnic podzielonych przez 2. Wynik izomorficzny jest zapewne prawdziwy, ale argument izometryczny w obecnej postaci wymaga poprawy.

10. **Lemat 5.2.4, s. 59–60.** Lemat jest fałszywy w obecnym sformułowaniu. W dowodzie pojawia się przejście typu $\nu(\psi_1) \geqslant 1 - t\varepsilon$, podczas gdy założenia lematu dają co najwyżej kontrolę przez $\nu(\psi)$. Przykłady jednopunktowe pokazują, że konkluzja nie wynika z podanych założeń. Sądzę, że lemat można naprawić przez dodanie właściwego założenia normalizującego albo przez sformułowanie wersji dokładnie odpowiadającej zastosowaniom.

11. **Twierdzenie 5.3.4, s. 62.** Dowód obejmuje wyrażenie z mianownikiem $m-2$, a twierdzenie jest sformułowane dla $m \geqslant 2$. Przypadek $m = 2$ powinien zostać wydzielony i odesłany do wcześniejszego twierdzenia.

Moja opinia o rzeczonych niedostatkach jest następująca. Nie są to li tylko literówki: kilka miejsc rzeczywiście wymaga korekty matematycznej. Jednocześnie uważam, że błędy te mają charakter lokalny i naprawialny. W szczególności nie podważają one głównych kierunków rozprawy, nie unieważniają zasadniczych idei ani nie zmieniają faktu, że Doktorant uzyskał wartościowe wyniki. Najpoważniejsze uwagi dotyczą Lematów 3.7.1, 4.4.3 i 5.2.4 oraz końcówki dowodu Twierdzenia 3.6.3. W mojej ocenie powinny one zostać omówione przez Doktoranta podczas obrony i poprawione w wersji archiwalnej rozprawy. Nie widzę jednak powodu, aby wstrzymywały one dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów postępowania.

Drobne błędy językowe i redakcyjne

Poniższa lista nie zmienia pozytywnej oceny języka pracy. Angielski rozprawy jest zasadniczo dobry, a większość uwag ma charakter kosmetyczny. Warto jednak usunąć je w wersji ostatecznej.

Miejsce	Jest	Proponowana poprawka
s. 12	“there a new monograph”	“there is a new monograph”
s. 12	“constructvarious”	“construct various”
s. 13	“different amount of factors”	“different numbers of factors”
s. 16	“By Q andR”	“By $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$”
s. 16	“every any D”	przeformułować definicję MA, np. “for every family D of at most κ dense sets”
s. 17	“relative isolated point”	“relatively isolated point”
s. 21	“one can check the monographs”	lepiej: “one can consult the monographs”
s. 29	“B is would not be barely alternating”	“B would not be barely alternating”
s. 34	“an condition”	“a condition”
s. 34	“not isolated neither from left nor right”	“neither isolated from the left nor from the right”
s. 37	“we may think consider $\mathcal{I}$”	“we may consider $\mathcal{I}$” albo “we may think of $\mathcal{I}$ as”
s. 41	“does not exceed to the character”	“does not exceed the character”
s. 45	“If follows”	“It follows”
s. 53	“hyperspaces”	“hyperplanes”
s. 57	“There are few pairs...”	“There are only few pairs...” albo “Few pairs are known...”
s. 59	“breath-taking lines”	“breathtaking lines” albo neutralniej: “striking lines”
s. 70	“$r = \sup\{\|\phi\| \phi \in F\}$”	brakuje dwukropka: “$r = \sup\{\|\phi\| : \phi \in F\}$”
Indeks symboli	ten sam symbol przy izometrii i izomorfizmie	rozróżnić symbole, np. $\cong$ dla izometrii i $\simeq$ dla izomorfizmu

Konkluzja

Podsumowując, rozprawa doktorska mgr. Macieja Korpalskiego przedstawia oryginalne rozwiązania istotnych problemów naukowych z teorii przestrzeni Banacha funkcji ciągłych, świadczy o bardzo dobrej wiedzy teoretycznej autora i wyraźnie potwierdza jego umiejętność samodzielnego prowadzenia badań naukowych. Dorobek Doktoranta jest ponadprzeciętny, a w mojej ocenie wręcz nietypowy dla osoby na tym etapie kariery. Rozprawa łączy kilka zaawansowanych działów matematyki i zawiera wyniki, które zasługują na uwagę specjalistów.

Uwagi krytyczne przedstawione powyżej powinny zostać potraktowane jako wskazówki do przygotowania poprawionej wersji rozprawy oraz jako naturalne tematy do omówienia w trakcie obrony. W mojej ocenie wskazane usterki są naprawialne i nie zmieniają zasadniczej, bardzo pozytywnej oceny pracy.

W związku z powyższym stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie matematyka. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Macieja Korpalskiego do dalszych etapów postępowania, w szczególności do publicznej obrony rozprawy doktorskiej. Ponadto, ze względu na poziom naukowy uzyskanych wyników, szerokość zastosowanych metod oraz ponadprzeciętny dorobek Doktoranta, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

Tomasz Kania

Tomasz Kania

Podpisany elektronicznie przez
Tomasz Kania
06.05.2026
23:40:41 +02'00'