



UNIwersytet
Warszawski



Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki (IMSiM)
prof. dr hab. Piotr B. Mucha

Warszawa, 14 września 2026

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Macieja Tadeja

p.t.: "Analiza i symulacje nieliniowych modeli z nielokalną dyspersją gatunków w ograniczonych płaskich siedliskach"

napisanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Grzegorza Karcha

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska mgra Macieja Tadeja liczy około 100 stron i została podzielona na pięć rozdziałów. Pierwszy z nich stanowi standardowe wprowadzenie do tematyki pracy oraz autoreferat przedstawiający jej główne cele i wyniki. Rozdział drugi poświęcony jest teorii operatorów nielokalnych, trzeci – analizie zagadnień stacjonarnych, czwarty dotyczy problemów ewolucyjnych, natomiast rozdział piąty skupia się na metodach numerycznych oraz przeprowadzonych symulacjach.

Na wstępie należy zwrócić uwagę na pewną nieścisłość terminologiczną. Używane w rozprawie określenie „dyspersja” odpowiada angielskiemu terminowi *dispersal*, wywodzącemu się z terminologii biologicznej, i nie powinno być utożsamiane z dyspersją w znaczeniu stosowanym np. w teorii równania Schrödingera.

Część wyników przedstawionych w rozprawie została opublikowana w pracy:

Maciej Tadej, *Long time behaviour of solutions to non-local and non-linear dispersal problems*, Journal of Differential Equations, Volume 416, Part 3, 2025, pp. 2043–2064.

Jądnem rozprawy jest rozdział drugi, w którym Autor podejmuje próbę systematycznego opisu teorii spektralnej operatorów nielokalnych zadanych za pomocą splotu w obszarze ograniczonym, ze szczególnym uwzględnieniem warunków brzegowych typu Dirichleta i Neumanna. Zarówno z punktu widzenia zastosowań, jak i samej analizy matematycznej bardziej interesujący jest przypadek warunku Neumanna i jemu poświęcona została zasadnicza część rozważań.

Jednym z głównych wyników tej części pracy jest precyzyjny opis struktury widma rozważanych operatorów. Zastosowanie metody Galerkina do badania jego własności – w szczególności współlistnienia części ciągłej oraz części dyskretnej, której wartości własne zbiegają do brzegu widma ciągłego – nosi wyraźne znamiona oryginalności. Jednocześnie rozdział ten obarczony jest istotną wadą.

Głównym problemem tej części rozprawy jest zdecydowanie niewystarczający przegląd literatury. Teoria operatorów splotowych ma długą historię, podczas gdy Autor odwołuje się przede wszystkim do stosunkowo niedawnych publikacji. W konsekwencji lektura rozprawy nie zawsze pozwala jednoznacznie rozstrzygnąć, które rezultaty stanowią rzeczywisty, autorski wkład Doktoranta, a które są ponownym wyprowadzeniem wyników znanych już wcześniej w literaturze. Brakuje tu szerszego osadzenia uzyskanych rezultatów w klasycznej teorii operatorów całkowych i splotowych oraz bardziej pogłębionej kwerendy bibliograficznej.

Pewne zastrzeżenie natury redakcyjnej budzi również sposób sformułowania Twierdzenia 2.4.1. Przy pobieżnej lekturze może ono sprawiać wrażenie rezultatu o znacznie bardziej przełomowym charakterze, niż wynika to z jego rzeczywistej treści. Jakościowo opisuje ono strukturę spektrum składającego się z części ciągłej oraz rozłącznej części dyskretnej, przy czym kres części ciągłej jest jednocześnie punktem skupienia części dyskretnej. Jest to wynik interesujący, jednak jego miejsce względem rezultatów znanych wcześniej powinno zostać wyraźniej przedstawione. Zamieszczony w rozprawie przykład dobrze ilustruje omawiane zjawisko, jednak z mojego punktu widzenia nie został przeanalizowany do końca i mógłby zostać wykorzystany do pełniejszego pokazania struktury widma tak jak w rzeczonyj pracy z JDE, gdzie mamy dokładną analizę dla przykładu torusa.

W rozdziale trzecim rozważany jest przypadek stacjonarny, w szczególności układ zawierający operator nielokalny w pierwszym równaniu oraz operator Laplace'a w drugim. Wcześniej Doktorant wykazuje jednak istnienie nieskończenie wielu nietrywialnych rozwiązań dla pewnego nielokalnego, nieliniowego zagadnienia własnego

$$\mathcal{L}V + f(V) = \lambda$$

(Twierdzenie 3.2.3), wykorzystując teorię bifurkacji Rabinowitza. Zastąpienie klasycznego operatora lokalnego operatorem nielokalnym stanowi w tym kontekście pewne novum, a w analizowanych modelach biologicznych, takich jak układy typu Klausmeiera–Greya, wydaje się również dobrze uzasadnione z punktu widzenia modelowania. Należy jednak zaznaczyć, że od strony analitycznej przeprowadzone tu rozważania mają w dużej mierze charakter zastosowania standardowych narzędzi matematycznych do konkretnej klasy modeli biologicznych. Do warstwy merytorycznej związanej bezpośrednio z matematyką biologiczną nie jestem w stanie odnieść się w pełni, ponieważ wykracza ona poza zakres mojej specjalizacji.

Rozdział czwarty przenosi rozważania na układ ewolucyjny. Głównym rezultatem jest analiza rozwiązań globalnych w czasie, w szczególności Twierdzenie 4.2.3 opisujące odpowiednie obszary niezmienniczości. Pod względem matematycznym zastosowany tu aparat jest jednak stosunkowo elementarny. Autor wykorzystuje przede wszystkim klasyczną teorię półgrup oraz metody bezpośrednie, bez konieczności głębszego wykorzystania subtelnych własności analizowanych operatorów nielokalnych. Wydaje się, że analiza ta mogłaby zostać istotnie pogłębiona, choć nie jest oczywiste, czy prowadziłoby to do jakościowo nowych wniosków dotyczących rozważanego modelu.

Na szczególną uwagę zasługują natomiast przedstawione w końcowej części rozdziału symulacje numeryczne. Brak efektu wygładzania, charakterystycznego dla klasycznych operatorów dyfuzyjnych, prowadzi w przypadku badanych operatorów nielokalnych do powstawania nieciągłych i nietrywialnych struktur przestrzennych, w tym struktur przypominających układ szachownicy. Jest to interesująca ilustracja jakościowej różnicy pomiędzy dynamiką generowaną przez operatory lokalne i nielokalne.

Rozdział piąty ma przede wszystkim charakter wyjaśniający i techniczny. Opisano w nim algorytmy wykorzystywane do przeprowadzenia symulacji numerycznych. Prezentacja wyników numerycznych jest estetycznym i potrzebnym uzupełnieniem części analitycznej oraz dobrze ilustruje zachowanie rozwiązań. Z punktu widzenia oceny rozprawy doktorskiej z matematyki nie stanowi jednak samodzielnego, istotnego wkładu naukowego. Pokazuje natomiast, że Autor potrafi właściwie dobrać i zastosować narzędzia numeryczne do badanych problemów.

Mimo przedstawionych powyżej uwag krytycznych, dotyczących przede wszystkim niewystarczającego przeglądu literatury, stosunkowo standardowego charakteru części wykorzystanego aparatu matematycznego oraz głównie ilustracyjnej roli wyników numerycznych,

stwierdzam, że oceniana rozprawa posiada wartość naukową. Doktorant uzyskał nowe wyniki dotyczące stacjonarnych i ewolucyjnych zagadnień z nielokalnym mechanizmem typu *dispersal* oraz wykazał się dobrą znajomością i umiejętnością stosowania narzędzi z zakresu teorii operatorów, teorii półgrup i metod bifurkacyjnych.

Biorąc pod uwagę bilans zalet i niedociągnięć rozprawy, stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska mgra Macieja Tadeja spełnia wymagania akademickie oraz wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim. W szczególności prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną Kandydata w dyscyplinie matematyka, stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz potwierdza jego umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

W związku z powyższym oceniam rozprawę pozytywnie i wnoszę o dopuszczenie mgra Macieja Tadeja do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Z poważaniem,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Piotr B. Mucha', written in a cursive style.

Piotr B. Mucha