

dr hab. inż. Maciej Wilczyński
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, dnia 31 sierpnia 2026 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Malwiny Mrowińskiej zatytułowanej „Estimation of a block-structured covariance matrix”

1 Informacje wstępne

Rozprawa doktorska mgr Malwiny Mrowińskiej, przygotowana pod kierunkiem dr hab. inż. Katarzyny Filipiak oraz promotorki pomocniczej dr inż. Moniki Mokrzyckiej w Instytucie Matematyki Politechniki Poznańskiej, podejmuje aktualną i istotną problematykę z zakresu wielowymiarowej analizy statystycznej. Dysertacja została przedstawiona Radzie Dyscypliny Naukowej Matematyka przy Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego. Praca składa się z pięciu powiązanych tematycznie artykułów naukowych, z których cztery zostały opublikowane w renomowanych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, a jeden został złożony do publikacji.

- [A] M. Janiszewska, A. Markiewicz, M. Mokrzycka, *Block matrix approximation via entropy loss function*, Applications of Mathematics, 65(6), 829–844, 2020.
- [B] A. Markiewicz, M. Mokrzycka, M. Mrowińska, *Quasi shrinkage estimation of a block-structured covariance matrix*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 94(14), 3093–3110, 2024.
- [C] M. Mokrzycka, M. Mrowińska, *Block covariance matrix estimation with structured off-diagonal blocks*, Statistical Papers, 66, 129, 2025.
- [D] K. Filipiak, A. Markiewicz, M. Mrowińska, *Characterization of quadratic subspaces of partitioned matrices*, submitted.
- [E] K. Filipiak, A. Markiewicz, A. Mieldzioc, M. Mrowińska, *On estimation of partitioned covariance matrix with linearly structured blocks*, Statistical Papers, 66, 98, 2025.

2 Opis problematyki

W klasycznym wnioskowaniu statystycznym estymacja macierzy kowariancji Ω opiera się najczęściej na próbkowej macierzy kowariancji $\mathbf{S}$ lub na estymatorze największej wiarygodności $\mathbf{S}_{ML}$. W przypadku danych wysokowymiarowych, gdy liczba obserwowanych cech m znacznie przewyższa liczebność próby ($m \gg n$), macierze $\mathbf{S}$ i $\mathbf{S}_{ML}$ stają się osobliwe. Uniemożliwia to ich wykorzystanie w klasycznych procedurach estymacyjnych i testowych. Aby przezwyciężyć te trudności, stosuje się zaawansowane metody estymacji macierzy kowariancji, takie jak metody ściągania (ang. *shrinkage*), LASSO czy graficzne LASSO. Innym skutecznym podejściem jest narzucenie na nieznaną macierz Ω odpowiedniej struktury algebraicznej. Struktura ta może wynikać z naturalnego podziału zmiennych na podwektory odpowiadające na przykład grupom cech lub pomiarom powtarzanym w czasie bądź przestrzeni.

Doktorantka skoncentrowała swoje badania na drugim z wymienionych podejść, analizując estymację blokowych macierzy kowariancji Γ złożonych z czterech podmacierzy. W rozważanych modelach bloki diagonalne są symetryczne, lecz nie podlegają dodatkowym ograniczeniom strukturalnym, natomiast bloki pozadiagonalne, opisujące kowariancje między podwektorami zmiennych, mają ściśle określoną strukturę liniową lub nieliniową, taką jak symetria złożona (ang. *compound symmetry*), proces autoregresyjny pierwszego rzędu AR(1) czy podprzestrzenie kwadratowe (ang. *quadratic subspaces*).

Narzucenie określonej struktury na macierz kowariancji Ω prowadzi do istotnego zmniejszenia liczby nieznanych parametrów, co umożliwia jej estymację również w przypadku danych wysokowymiarowych.

Głównym celem rozprawy było opracowanie efektywnych obliczeniowo metod estymacji macierzy kowariancji o strukturze blokowej. Zaproponowane metody stanowią interesującą alternatywę dla klasycznych podejść i charakteryzują się prostotą przyjętych modeli oraz wysoką efektywnością obliczeniową.

3 Wyniki rozprawy

Model statystyczny analizowany w rozprawie można przedstawić w następujący sposób, zachowując notację przyjętą przez Autorkę. Niech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ będą niezależnymi m -wymiarowymi wektorami losowymi o jednakowym rozkładzie $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Omega)$. Wówczas macierz obserwacji

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

ma macierzowy rozkład normalny postaci

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{m,n}(\boldsymbol{\mu} \mathbf{1}'_n, \Omega, \mathbf{I}_n), \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{1}_n$ oznacza n -wymiarowy wektor jedynek, a $\mathbf{I}_n$ jest macierzą jednostkową stopnia n .

Każdy wektor $\mathbf{x}_i$ (dla $i = 1, \dots, n$) składa się z dwóch naturalnie wyodrębnionych podwektorów, wynikających np. ze struktury doświadczenia lub powtórzonych pomiarów:

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{z}_i \end{pmatrix}.$$

gdzie $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^q$ oraz $p + q = m$. Wówczas wektor wartości oczekiwanych ma postać

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_z \end{pmatrix}.$$

natomiast macierz kowariancji wektora $\mathbf{x}_i$ ma strukturę blokową

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}' & \Omega_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

gdzie $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ oraz $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ są odpowiednio macierzami kowariancji podwektorów $\mathbf{y}_i$ i $\mathbf{z}_i$, natomiast $\Omega_{12} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ jest macierzą kowariancji wzajemnej między nimi. Bloki diagonalne Ω_1 i Ω_2 są symetrycznymi, nieustrukturyzowanymi macierzami dodatnio określonymi, natomiast blok pozadiagonalny Ω_{12} odzwierciedla specyficzne zależności liniowe bądź nieliniowe między dwiema grupami zmiennych.

Ze względu na obszerność rozprawy doktorskiej, stanowiącej cykl pięciu publikacji, poniżej omówię jedynie najważniejsze wyniki otrzymane w tych pracach.

Artykuł [A]

Doktorantka rozpatrzyła problem znalezienia najlepszego przybliżenia nieznanej macierzy kowariancji $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times m}$, zawierającej $\frac{m(m+1)}{2}$ parametrów, za pomocą macierzy blokowej postaci

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Psi \\ \Psi' & \Gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

W macierzy Γ bloki diagonalne Γ_1 i Γ_2 są symetrycznymi, dodatnio określonymi macierzami odpowiednio stopnia p i q , natomiast bloki pozadiagonalne mają jedną z dwóch następujących struktur: $\Psi = \delta \mathbf{1}_p \mathbf{1}_q'$ albo $\Psi = \delta \mathbf{A}$, przy czym macierz $\mathbf{A}$ ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varrho^p & \varrho^{p-1} & \dots & \varrho^{p+q-1} \\ \varrho^{p-1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho^2 & \dots & \dots & \dots \\ \varrho & \varrho^2 & \dots & \varrho^q \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Parametry $\varrho \in \mathbb{R}$ oraz $\delta \in \mathbb{R}$ są tak dobrane, aby macierz Γ była dodatnio określona.

Niech $\mathbb{R}_s^>$ oznacza zbiór dodatnio określonych macierzy symetrycznych stopnia s i niech

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ \Gamma_1 \in \mathbb{R}_p^>, \Gamma_2 \in \mathbb{R}_q^>, \Psi = \delta \mathbf{1}_p \mathbf{1}_q' : \Gamma \in \mathbb{R}_{p+q}^> \}, \\ S_2 &= \{ \Gamma_1 \in \mathbb{R}_p^>, \Gamma_2 \in \mathbb{R}_q^>, \Psi = \delta \mathbf{A} : \Gamma \in \mathbb{R}_{p+q}^> \} \end{aligned}$$

będą zbiorami macierzy o strukturach zdefiniowanych powyżej.

Wyznaczając najlepsze przybliżenie ustalonej macierzy $\Omega \in \mathbb{R}_m^>$ za pomocą macierzy $\Gamma \in S_1$ albo macierzy $\Gamma \in S_2$, Doktorantka przyjęła jako miarę rozbieżności między nimi funkcję straty entropii:

$$f(\Omega, \Gamma) = \text{tr}(\Omega^{-1} \Gamma) - \ln |\Omega^{-1} \Gamma| - (p + q).$$

Wykorzystując wypukłość tej funkcji względem zmiennej Γ oraz specyficzną strukturę zbioru S_1 , Autorka wyprowadziła układ równań charakteryzujący rozwiązanie problemu minimalizacji funkcji straty $f(\Omega, \Gamma)$ na tym zbiorze. Dla ustalonej macierzy Ω układ ten określa warunki, jakie muszą spełniać macierze Γ_1 i Γ_2 oraz parametr δ , odpowiadające poszukiwanemu minimum. W analogiczny sposób Doktorantka wyznaczyła układ równań opisujący warunki, jakie

muszą spełniać macierze Γ_1 i Γ_2 oraz parametry δ i ϱ , odpowiadające rozwiązaniu problemu minimalizacji funkcji $f(\Omega, \Gamma)$ na zbiorze S_2 . Żaden z tych układów nie ma rozwiązania w postaci jawnej, dlatego mogą być one rozwiązywane jedynie metodami numerycznymi, na przykład za pomocą procedury iteracyjnej zaproponowanej w pracy.

Doktorantka przeprowadziła również badania symulacyjne, które wykazały, że struktura należąca do zbioru S_2 jest znacznie lepiej identyfikowana przy wykorzystaniu funkcji straty entropii niż struktura należąca do zbioru S_1 .

Artykuł [B]

Doktorantka rozpatrzyła problem wyznaczenia dobrze uwarunkowanego estymatora nieznanej ustrukturyzowanej macierzy kowariancji należącej do klasy $\mathcal{T}_{CS}^>$, obejmującej wszystkie dodatnio określone macierze symetryczne o strukturze blokowej

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \gamma \mathbf{1}_p \mathbf{1}_q' \\ \gamma \mathbf{1}_q \mathbf{1}_p' & \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_p \mathbf{1}_q' \\ \mathbf{1}_q \mathbf{1}_p' & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

W powyższej reprezentacji Γ_1 oraz Γ_2 są symetrycznymi, dodatnio określonymi macierzami odpowiednio stopnia p i q , natomiast parametr $\gamma \in \mathbb{R}$ jest tak dobrany, aby macierz Γ była dodatnio określona.

Aby wyznaczyć estymator największej wiarygodności ustrukturyzowanej macierzy kowariancji Γ , należy znaleźć estymator $\hat{\Gamma}_{ML} \in \mathcal{T}_{CS}^>$, który jest dobrze uwarunkowany oraz maksymalizuje na zbiorze $\mathcal{T}_{CS}^>$ funkcję wiarygodności:

$$\ln f(\Gamma) = -\frac{nm}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln |\Gamma| - \frac{n}{2} \text{tr}(\mathbf{S}_{ML} \Gamma^{-1}).$$

Autorka wyprowadziła układ równań określający warunki, jakie muszą spełniać macierze Γ_1 i Γ_2 oraz parametr γ , aby tworzyły one estymator $\hat{\Gamma}_{ML}$.

Ponieważ maksymalizacja funkcji wiarygodności odbywa się na zbiorze, który nie jest przestrzenią kwadratową, układ równań wyznaczający $\hat{\Gamma}_{ML}$ jest złożony. Można go rozwiązać jedynie za pomocą metod numerycznych. Proces ten jest bardzo kosztowny obliczeniowo, szczególnie w przypadku modeli wielowymiarowych.

Aby uniknąć wysokiej złożoności obliczeniowej metody ML, Doktorantka zaproponowała estymację nieznanej macierzy kowariancji za pomocą metody najmniejszych kwadratów (LS), która polega na rzutowaniu estymatora $\mathbf{S}_{ML}$ nieustrukturyzowanej macierzy kowariancji na przestrzeń macierzy o zadanej strukturze. Za pomocą tego podejścia wyznaczyła jawną postać estymatora $\hat{\Gamma}_{LS}$, otrzymanego poprzez minimalizację normy Frobeniusa na przestrzeni $\mathcal{T}_{CS}$.

$$f(\mathbf{S}_{ML}, \hat{\Gamma}_{LS}) = \min_{\Gamma \in \mathcal{T}_{CS}} \|\mathbf{S}_{ML} - \Gamma\|_F^2.$$

Uzyskany w ten sposób estymator $\hat{\Gamma}_{LS}$ nie musi być ani dodatnio określony, ani dobrze uwarunkowany. Standardowe rzutowanie $\hat{\Gamma}_{LS}$ na stożek wypukły $\mathcal{T}_{CS}^>$ jest czasochłonne, co jest sprzeczne z celem opracowania szybkiej alternatywy dla estymatora ML. W celu rozwiązania tego problemu z estymatorem LS, Autorka zaproponowała oryginalną dwustopniową procedurę prowadzącą do wyznaczenia estymatora $\hat{\Gamma}_{QS}$ typu *quasi-shrinkage*. W pierwszym etapie wyznaczany jest estymator *shrinkage* $\hat{\Gamma}_S$ będący liniową kombinacją estymatora $\hat{\Gamma}_{LS}$ z odpowiednio dobranymi macierzą $\hat{\mathbf{T}}$ i parametrem kurczenia λ :

$$\hat{\Gamma}_S = (1 - \lambda) \hat{\Gamma}_{LS} + \lambda \hat{\mathbf{T}}$$

Jeżeli $\widehat{\Gamma}_S$ jest macierzą dodatnio określoną i dobrze uwarunkowaną, to przyjmuje się $\widehat{\Gamma}_{QS} = \widehat{\Gamma}_S$. W przeciwnym przypadku $\widehat{\Gamma}_S$ poddaje się odpowiedniej modyfikacji algebraicznej, opisanej w pracy, prowadzącej do otrzymania estymatora $\widehat{\Gamma}_{QS}$ o pożądanych własnościach.

Artykuł [C]

Doktorantka rozpatrzyła problem wyznaczenia dobrze uwarunkowanego estymatora nieznanej macierzy kowariancji należącej do klasy $\mathcal{T}_{AR}^>$, obejmującej wszystkie dodatnio określone macierze symetryczne o strukturze blokowej

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \gamma \mathbf{A} \\ \gamma \mathbf{A}' & \Gamma_2 \end{bmatrix}.$$

W powyższej reprezentacji macierz $\mathbf{A}$ ma zdefiniowaną wcześniej postać (3), Γ_1 oraz Γ_2 są symetrycznymi dodatnio określonymi macierzami odpowiednio stopnia p i q , natomiast parametry γ i ϱ są tak dobrane, aby macierz Γ była dodatnio określona.

Podobnie jak w pracy [B], Doktorantka scharakteryzowała estymatory ML i QS macierzy kowariancji, podając układy równań, które spełniają parametry definiujące te estymatory. Otrzymane w ten sposób estymatory nie mają postaci jawnej, a ich wartości mogą być wyznaczone jedynie za pomocą metod numerycznych. Ponadto estymator ML jest bardziej złożony obliczeniowo, natomiast estymator QS wymaga wieloetapowej procedury, w której na każdym etapie weryfikuje się dodatnią określoność oraz dobre uwarunkowanie otrzymanej macierzy.

Dlatego w pracy [C] Doktorantka zaproponowała również cztery alternatywne metody estymacji rozważanej struktury, oparte na oddzielnym szacowaniu składników Ψ oraz $\mathbf{W}$ w reprezentacji macierzy $\Gamma \in \mathcal{T}_{AR}^>$:

$$\Gamma = \Psi + \begin{pmatrix} \Gamma_1 - \Psi_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_2 - \Psi_{22} \end{pmatrix} = \Psi + \mathbf{W},$$

gdzie Ψ oznacza strukturę kowariancji typu AR(1), przy czym Ψ_{11} oraz Ψ_{22} są jej blokami diagonalnymi odpowiednich wymiarów, natomiast $\mathbf{W}$ reprezentuje szum. W każdej z tych metod estymator ma postać:

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Psi} + \widehat{\mathbf{W}},$$

przy czym estymatorem szumu $\mathbf{W}$ jest

$$\widehat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} - \widehat{\Psi}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} - \widehat{\Psi}_{22} \end{bmatrix},$$

Spośród czterech metod estymacji struktury AR(1) jedną z dwóch najlepszych, a jednocześnie najszybszą, okazała się najprostsza z nich, prowadząca do estymatora określonego w pracy jako *estymator naiwny*. W tej metodzie, opartej na wynikach z pracy Roy i Leiva (2008), estymatory parametrów ϱ oraz γ są dane wzorami

$$\begin{cases} \widehat{\varrho} = \left(\frac{\widehat{\varrho}_1^{p-1} + \widehat{\varrho}_2^{\frac{p-1}{2}} + \widehat{\varrho}_3^{\frac{p-1}{3}} + \dots + \widehat{\varrho}_{p-1}}{p-1} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \\ \widehat{\gamma} = \frac{\text{tr}(\mathbf{S}_{ML})}{m}, \end{cases}$$

gdzie $\widehat{\varrho}_i$ oznacza średnią wartość elementów znajdujących się na i -tej nadprzekątnej macierzy $\mathbf{S}_{ML}$, dla $i \in \{1, \dots, p-1\}$.

Artykuł [D]

Doktorantka rozpatrzyła problem estymacji specyficznych struktur zależności liniowych w przestrzeni kwadratowej zawierającej macierz jednostkową.

W pierwszej części pracy Autorka wykazała, że każda przestrzeń kwadratowa Q jest izomorficzna ze specjalnie skonstruowaną przestrzenią blokowo-diagonalną $\mathbf{D}$. Ponadto udowodniła, że każdą macierz $\mathbf{A} \in Q$ można przedstawić w postaci rozkładu blokowo-spektralnego:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_1} \otimes \Psi_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r_2} \otimes \Psi_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{r_k} \otimes \Psi_k \end{bmatrix} \mathbf{P}',$$

gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą ortogonalną, natomiast $\mathbf{I}_{r_i} \otimes \Psi_i$ opisuje odpowiednią strukturę diagonalną.

Korzystając z powyższego rozkładu, Autorka wyprowadziła jawną postać rzutu dowolnej macierzy symetrycznej na podprzestrzeń kwadratową Q zawierającą macierz jednostkową. Ten rezultat ma istotne znaczenie praktyczne, gdyż wynika z niego, że rzut symetrycznej dodatnio określonej macierzy $\mathbf{X}$ na przestrzeń Q prowadzi do estymatora $\Pi_Q(\mathbf{X})$, który zachowuje najistotniejsze własności macierzy wyjściowej. W szczególności:

1. estymator $\Pi_Q(\mathbf{X})$ jest dodatnio określony,
2. wskaźnik uwarunkowania spełnia nierówność

$$\kappa(\Pi_Q(\mathbf{X})) \leq \kappa(\mathbf{X}),$$

co oznacza, że rzut nie pogarsza uwarunkowania macierzy.

Głównym rezultatem artykułu jest pełna charakterystyka blokowych przestrzeni liniowych $\mathcal{T}$ będących przestrzeniami kwadratowymi. Niech $\mathbb{R}_m^s$ oznacza przestrzeń macierzy symetrycznych stopnia m . Uwzględniając strukturę blokową (2) macierzy Ω , Autorka rozważyła zbiór macierzy

$$\mathcal{T} = \{ \mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 : \mathbf{T}_1 \in \mathcal{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathcal{T}_2, \mathbf{T}_3 \in \mathcal{T}_3, \}.$$

gdzie zbiory $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_3$ mają postać

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{p+q}^s : \mathbf{T}_{11} \in \mathcal{T}_{11} \subseteq \mathbb{R}_p^s \right\}, \\ \mathcal{T}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{p+q}^s : \mathbf{T}_{22} \in \mathcal{T}_{22} \subseteq \mathbb{R}_q^s \right\}, \\ \mathcal{T}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{12}' & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{p+q}^s : \mathbf{T}_{12} \in \mathcal{T}_{12} \subseteq \mathbb{R}^{p \times q} \right\}. \end{aligned}$$

Jeżeli wszystkie przestrzenie $\mathcal{T}_{ij}$, dla $i, j \in \{1, 2\}$ oraz $i \leq j$, są podprzestrzeniami liniowymi, wówczas $\mathcal{T}$ jest podprzestrzenią liniową, którą można przedstawić w postaci

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \boxplus \mathcal{T}_2 \boxplus \mathcal{T}_3. \quad (4)$$

gdzie symbol $\boxplus$ oznacza ortogonalną sumę prostą.

Doktorantka udowodniła między innymi, że $\mathcal{T}$ jest podprzestrzenią kwadratową wtedy i tylko wtedy, gdy jej bloki diagonalne $\mathcal{T}_{11}$ oraz $\mathcal{T}_{22}$ są podprzestrzeniami kwadratowymi, a $\mathcal{T}_{12}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni zdefiniowanej w pracy.

Na koniec Doktorantka wykorzystała powyższe wyniki do konstrukcji estymatorów macierzy kowariancji. Wykazała, że jeżeli przestrzeń $\mathcal{T}$ jest podprzestrzenią kwadratową, to rzut próbkowej macierzy kowariancji na tę przestrzeń, $\Pi_{\mathcal{T}}(\mathbf{S})$, jest najlepszym nieobciążonym estymatorem kwadratowym macierzy kowariancji $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{T}$, a rzut estymatora największej wiarygodności, $\Pi_{\mathcal{T}}(\mathbf{S}_{ML})$, jest estymatorem największej wiarygodności macierzy $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{T}$.

Artykuł [E]

Doktorantka rozpatrzyła problem szybkiej estymacji ustrukturyzowanych macierzy kowariancji należących do przestrzeni liniowej $\mathcal{T}$ określonej w (4), która w ogólnym przypadku nie musi być podprzestrzenią kwadratową.

W celu konstrukcji estymatorów dodatnio określonych Autorka, podobnie jak w pracach [B] i [C], zastosowała metodę kurczenia (ang. *shrinkage*) do estymatorów uzyskanych przez rzutowanie estymatora $\mathbf{S}$ lub $\mathbf{S}_{ML}$ na przestrzeń $\mathcal{T}$. Podejście to pozwoliło na zachowanie wymaganej dodatniej określoności estymowanych macierzy.

Istotnym rozszerzeniem w stosunku do wyników przedstawionych w pracach [B] i [C] jest rozważenie bardziej ogólnej klasy struktur. W pracy [E] blok pozadiagonalny macierzy $\mathbf{\Gamma}$ nie jest ograniczony żadną z góry ustaloną postacią strukturalną, a przestrzeń macierzy docelowych jest dowolną podprzestrzenią kwadratową, której charakterystykę przedstawiono w pracy [D].

4 Ocena rozprawy

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska charakteryzuje się bardzo wysokim poziomem naukowym oraz nienaganną strukturą formalną. Praca stanowi cykl pięciu artykułów, z których cztery zostały już opublikowane. Rozprawę otwiera świetnie napisany wstęp, w którym Autorka w sposób przejrzysty i syntetyczny przedstawiła najważniejsze wyniki uzyskane we wszystkich pięciu pracach. W całej rozprawie Doktorantka wykazała się znakomitym warsztatem matematycznym, swobodnie łącząc zaawansowane techniki analizy macierzowej (operatory wektoryzacji, pochodne macierzowe) z klasyczną i nowoczesną statystyką wielowymiarową. Wszystkie sformułowane twierdzenia i lematy zostały opatrzone ścisłymi, eleganckimi i kompletnymi dowodami matematycznymi, które nie budzą najmniejszych zastrzeżeń. Całość napisana jest w języku angielskim z dużą dbałością o precyzję terminologiczną, a drobne uchybienia edytorskie czy literówki mają charakter wybitnie marginalny i w żaden sposób nie wpływają na końcową, bardzo wysoką ocenę rozprawy.

Podobnie jak w przypadku wielu współczesnych rozpraw doktorskich mających formę cyklu publikacji, wszystkie prace wchodzące w skład rozprawy mają charakter wieloautorski. Choć udział współautorów, w tym Promotorki, będących wybitnymi specjalistami w tej dziedzinie, był znaczący, należy podkreślić kluczową rolę mgr Malwiny Mrowińskiej w realizacji badań. Załączone do rozprawy oświadczenia oraz szczegółowy opis jej wkładu własnego, szacowanego na 40–50%, nie pozostawiają w tej kwestii żadnych wątpliwości. Doktorantka była autorką wielu oryginalnych wyników teoretycznych, przeprowadziła zasadniczą część dowodów matematycznych oraz odegrała wiodącą rolę w zaplanowaniu i realizacji badań symulacyjnych.

Doceniając bezdyskusyjne walory naukowe przedstawionej rozprawy, chciałbym poprosić

Doktorantkę o ustosunkowanie się do kilku kwestii. Sformułowane pytania w żaden sposób nie obniżają bardzo wysokiej oceny osiągnięć naukowych Autorki.

1. **Wybór miary odległości:** W pracy [A] procedura identyfikacji optymalnej struktury kowariancji bazuje na funkcji straty entropii (*entropy loss function*). W związku z tym chciałbym zapytać Doktorantkę, czy w swoich badaniach rozważała wykorzystanie innych popularnych miar rozbieżności, takich jak norma Frobeniusa lub norma spektralna? Ponadto interesuje mnie, czy i w jakich sytuacjach zmiana funkcji straty mogłaby prowadzić do wskazania innej struktury docelowej, która w kontekście przyjętych założeń okazałaby się suboptymalna.
2. **Skalowalność i ograniczenia numeryczne:** W pracach [B] i [C] estymatory największej wiarygodności (ML) wyznaczane są z wykorzystaniem metody spadku gradientu. W kontekście współczesnych wyzwań związanych z analizą danych o ekstremalnie wysokim wymiarze (*ultra-high dimensional data*) proszę o komentarz dotyczący praktycznej skalowalności zaimplementowanych algorytmów. W szczególności interesujące byłoby określenie granic ich zastosowania w zależności od liczby cech m oraz wskazanie, w jakim stopniu czas zbieżności może stanowić barierę dla ich użycia w tego typu problemach.
3. **Odporność na założenia rozkładowe:** W każdej z pięciu prac wchodzących w skład rozprawy zakłada się, że obserwowana macierz $\mathbf{X}$ ma wielowymiarowy rozkład normalny. Jak wrażliwe są zaproponowane procedury, w szczególności technika *quasi-shrinkage*, na naruszenie tego założenia? Czy przynajmniej niektóre wyniki uzyskane w rozprawie można uogólnić na inną klasę rozkładów, na przykład rozkładów o ciężkich ogonach?

5 Konkluzja

Podsumowując, przedstawiona rozprawa doktorska wnosi znaczący i oryginalny wkład w rozwój teorii oraz zastosowań estymacji macierzy kowariancji o określonej strukturze w wielowymiarowej analizie statystycznej. Zaproponowane metody estymacji typu *quasi-shrinkage* oraz nowatorskie wykorzystanie własności podprzestrzeni kwadratowych stanowią cenne rozszerzenie dotychczasowego stanu wiedzy i wpisują się w światowy nurt badań nad modelowaniem danych wysokowymiarowych.

Przedstawiona rozprawa z nawiązką spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. Stwierdzam, że mgr Malwina Mrowińska posiada głęboką wiedzę teoretyczną oraz w pełni ukształtowane umiejętności niezbędne do samodzielnego prowadzenia badań naukowych.

Zwracam się do Rady Dyscypliny Naukowej Matematyka przy Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego z wnioskiem o dopuszczenie mgr Malwiny Mrowińskiej do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora. Biorąc pod uwagę wybitne walory naukowe cyklu publikacji oraz wysoki poziom uzyskanych wyników teoretycznych, składam również wniosek o wyróżnienie tej rozprawy.



Maciej Wilczyński