

Poznań, 5 sierpnia 2026

prof. UAM dr hab. Łukasz Smaga
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań
E-mail: ls@amu.edu.pl

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr Malwiny Mrowińskiej pt. „*Estimation of a block-structured covariance matrix*”

Podstawę formalną sporządzenia niniejszej recenzji stanowi fakt, że Rada Dyscypliny Naukowej Matematyka przy Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego na posiedzeniu w dniu 16 czerwca 2026 roku podjęła uchwałę o powołaniu mnie na recenzenta rozprawy doktorskiej Pani Malwiny Mrowińskiej pt. „*Estimation of a block-structured covariance matrix*”. Postępowanie prowadzone jest na podstawie ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2024 r. poz. 1571 t.j.). Promotorem pracy jest Pani prof. PP dr hab. inż. Katarzyna Filipiak, a promotorem pomocniczym Pani dr inż. Monika Mokrzycka.

Rozprawa doktorska Pani mgr Malwiny Mrowińskiej składa się z dwóch głównych części. W części pierwszej podano preliminaria oraz krótkie zestawienie głównych wyników. W części drugiej znalazły się cztery artykuły naukowe oraz jeden manuskrypt przesłany do czasopisma, których współautorką jest Pani mgr Malwina Mrowińska. Poniżej dokonuję oceny tej rozprawy, skupiając się głównie na jej drugiej części.

1 Opis i ocena zawartości rozprawy

W tej części recenzji opisuję i oceniam poszczególne prace zawarte w rozprawie doktorskiej. Podaję również pewne uwagi krytyczne dotyczące w szczególności matematycznych aspektów pracy. Zaobserwowane nieścisłości budzą pewne wątpliwości natury formalnej, jednak nie wydają się one wpływać w istotny sposób na główne wnioski rozprawy.

1.1 Artykuł [A]

Artykuł [A] opublikowany w czasopiśmie *Applications of Mathematics* (40 pkt. MNiSW) dotyczy aproksymacji dodatnio określonych macierzy symetrycznych przez macierze blokowe o zadanej strukturze, ze szczególnym uwzględnieniem struktury bloków pozadiagonalnych. Rozważane są dwie klasy struktur: (1) elementy bloku pozadiagonalnego są jednakowe, (2) inspirowaną strukturą procesu autoregresyjnego pierwszego rzędu $AR(1)$. Jako kryterium dopasowania wykorzystano entropijną

funkcję straty. Jest to dobry wybór z punktu widzenia zastosowań statystycznych i analizy macierzy kowariancji, choć są też inne możliwości. W artykule odpowiednio połączono formalne narzędzia algebraiczne z praktycznym problemem identyfikacji struktury kowariancji. Przedstawiono również procedurę iteracyjną wyznaczania estymatorów oraz symulacje sprawdzające, czy zaproponowane metody rozpoznają właściwą strukturę macierzy kowariancji. Wyniki symulacyjne pokazują, że metoda może być użyteczna, zwłaszcza dla struktur autoregresyjnych, choć jej skuteczność zależy od rozważanej klasy i parametrów. W pracy nie obyło się jednak bez drobnych problemów:

- Strona 834: Jeśli chodzi o pochodną z funkcji f względem δ , to powinna być podana w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial \delta} = 2 \operatorname{tr}(\mathbf{V}_{12} \mathbf{1}_q \mathbf{1}_p') + 2\delta \operatorname{vec}' \left(\mathbf{\Gamma}_1 - \delta^2 \mathbf{1}_p \mathbf{1}_q' \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \mathbf{1}_q \mathbf{1}_p' \right)^{-1} \operatorname{vec} \left(\mathbf{1}_p \mathbf{1}_q' \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \mathbf{1}_q \mathbf{1}_p' \right).$$

Wzór podany w pracy jest zapisany poprawnie dopiero wtedy, gdy uwzględnimy warunek stacjonarności względem $\mathbf{\Gamma}_1$.

- Strona 834: Opis wymiaru macierzy duplikacji $\mathbf{D}_p$ w tekście powinien przyjąć formę $p^2 \times p(p+1)/2$ dla $\mathbf{\Gamma}_1$, a dla $\mathbf{\Gamma}_2$ powinno być $q^2 \times q(q+1)/2$.
- Strona 835: Podobne błędy jak powyżej. Powinno być:

$$\frac{\partial f}{\partial \delta} = 2 \operatorname{tr}(\mathbf{V}_{12}' \mathbf{A}) + 2\delta \operatorname{vec}'((\mathbf{\Gamma}_1 - \delta^2 \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \mathbf{A}')^{-1}) \operatorname{vec}(\mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \mathbf{A}')$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \left[2\delta \operatorname{vec}'(\mathbf{V}_{12}) + \delta^2 \operatorname{vec}'(\mathbf{\Gamma}_1 - \delta^2 \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \mathbf{A}')^{-1} (\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \otimes \mathbf{I}_p) \right] \operatorname{vec}(F).$$

- Strona 835: Twierdzenie 3.2 może być mylące. Powinno być napisane, że chodzi o minimum lokalne, tak jak też zostało zauważone przed tym twierdzeniem.

Mimo tych zastrzeżeń praca podejmuje interesujący problem i stanowi wartościowy punkt wyjścia do dalszych badań nad identyfikacją blokowych struktur kowariancyjnych.

1.2 Artykuł [B]

Praca [B] została opublikowana w porządnym czasopiśmie Journal of Statistical Computation and Simulation (70 pkt. MNiSW) w 2024 roku. Artykuł dotyczy estymacji macierzy kowariancji o specjalnej strukturze blokowej, w której bloki diagonalne są dowolnymi macierzami kowariancji, a bloki pozadiagonalne mają prostą, jednoparametrową strukturę $\gamma \mathbf{1}_p \mathbf{1}_q'$. Pierwszą rozważaną metodą estymacji jest metoda największej wiarygodności przy założeniu wielowymiarowego rozkładu normalnego. Niestety, numeryczne wyznaczanie tego typu estymatorów jest bardzo czasochłonne, więc jako drugą metodę zaproponowano estymator najmniejszych kwadratów, biorąc pod uwagę normę Frobeniusa (inne podejście niż w artykule [A]). Jednak ten estymator nie musi być macierzą dodatnio określoną lub dobrze uwarunkowaną. Zatem w dalszej części pracy proponowana jest procedura „quasi shrinkage”, która wychodzi od estymatora najmniejszych kwadratów, następnie poprawia go metodą „shrinkage”, a w razie potrzeby dodatkową korektą algebraiczną zapewniającą dodatnią określoność i lepsze uwarunkowanie macierzy. Należy docenić w tym podejściu próbę połączenia prostoty obliczeniowej estymacji najmniejszych kwadratów z własnościami pożądanymi w analizie wielowymiarowej. Artykuł zawiera również przejrzystą część symulacyjną, która ilustruje zachowanie metod dla różnych wymiarów

bloków i wartości parametru zależności między grupami cech. Mimo że pracę oceniam pozytywnie, to nie obyło się w niej bez niedociągnięć, podanych poniżej:

- Strona 3095: W Lemacie 2.1 powinno być założone, że macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna. Co prawda wynika to niejako z kontekstu całej pracy, ale dla formalności warto było to dopisać.
- Strona 3095: Wyprowadzenie wzoru

$$\gamma \in \left(-\frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}'_p \Gamma_1^{-1} \mathbf{1}_p \mathbf{1}'_q \Gamma_2^{-1} \mathbf{1}_q}}, \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}'_p \Gamma_1^{-1} \mathbf{1}_p \mathbf{1}'_q \Gamma_2^{-1} \mathbf{1}_q}} \right),$$

który jest poprawny, zawiera niestety drobne błędy. Po pierwsze o wektorze $\mathbf{v}$ należy założyć, że jest on różny od wektora zerowego. Po drugie nierówności w wyprowadzeniu powinny przyjąć postać:

$$\gamma^{-2} > \frac{\mathbf{1}'_p \Gamma_1^{-1} \mathbf{1}_p \mathbf{v}' \mathbf{1}_q \mathbf{1}'_q \mathbf{v}}{\mathbf{v}' \Gamma_2 \mathbf{v}}$$

oraz

$$\gamma^2 < \frac{1}{\mathbf{1}'_p \Gamma_1^{-1} \mathbf{1}_p \mathbf{1}'_q \Gamma_2^{-1} \mathbf{1}_q}.$$

- Strona 3097: W $\ln \mathcal{L}(\mathbf{S}, \Gamma)$ brakuje minusa w pierwszym składniku.
- Strony 3096 i 3098: W Twierdzeniu 3.1 podano istnienie macierzy maksymalizującej funkcję wiarygodności na Ω_0 . Czy jednak w definicji Ω_0 nie powinno być $\kappa(\Gamma) \leq \kappa_0$?
- Strona 3098: W Twierdzeniu 3.1 jest podany wzór na γ . Jednak nie widzę skąd pewność, że wyróżnik odpowiedniego równania kwadratowego jest dodatni oraz jeśli tak jest, to dlaczego właśnie ten pierwiastek równania kwadratowego jest właściwy. Pewnie kwestia ta wymaga dodatkowego uzasadnienia, więc być może nie zostało tutaj zapisane, że tak się zakłada, a praktyka pokazuje jak jest w konkretnych przypadkach.
- W symulacjach nie podano konkretnych macierzy Γ_1 i Γ_2 , które zostały użyte w eksperymentach. Bez tego wyniki nie są w pełni odtwarzalne.
- W pracy brakuje formalnego porównania czasu obliczeń, a zostało w niej wyraźnie zaznaczone, że występują znaczne różnice w tym czasie między metodami.

1.3 Artykuł [C]

Artykuł [C] został opublikowany w uznanym czasopiśmie Statistical Papers (100 pkt. MNiSW) w 2025 roku. W dużej mierze jest on podobny do pracy [B], ale zamiast rozważać strukturę kompletnej symetrii, rozważana jest bardziej skomplikowana struktura macierzy kowariancji odpowiadająca procesowi autoregresyjnemu rzędu pierwszego $AR(1)$. W pracy tej wyznaczono estymatory największej wiarygodności, najmniejszych kwadratów oraz ich poprawki jak w pracy [B]. Oczywiście bardziej złożona struktura kowariancyjna powoduje, że te konstrukcje estymatorów są trudniejsze do uzyskania niż wcześniejsze. Ponadto rozważane są inne metody estymacji, które w większości są zgrabnymi adaptacjami metod znanych w literaturze dotyczącej podobnych zagadnień. Rozważane metody zostały porównane w badaniach symulacyjnych pod różnymi aspektami. Wyniki tych badań pozwoliły na podanie rekomendacji w zakresie stosowania metod w praktyce. W szczególności rozważono czas obliczeń potrzebnych do wyznaczenia wartości poszczególnych estymatorów, czego brakowało w poprzednich dwóch artykułach. Co więcej, warto zwrócić uwagę, że w odróżnieniu od wcześniejszych dwóch prac, artykuł [C] zawiera przykład zastosowania rozważanych metod w praktycznym problemie. Pracę tę

oceniam jako kompletną i dobrze zorganizowaną, ale pojawiły się w niej poniższe niedociągnięcia:

- Strona 3: Macierz korelacji odpowiadająca procesowi $AR(1)$ jest dodatnio określona dla $\rho \in (-1, 1)$, a nie dla $\rho \in [-1, 1]$.
- Strona 4: W $\ln \mathcal{L}(\Gamma)$ brakuje minusa w pierwszym składniku.
- Strona 7: W drugim składniku wzoru na pochodną cząstkową z funkcji f po zmiennej ρ powinno być σ^4 oraz $\mathbf{I}_{p^2}$ zamiast σ^2 oraz $\mathbf{I}_p^2$, odpowiednio. To implikuje, że w trzecim równaniu Twierdzenia 2 brakuje σ^2 . Najprawdopodobniej jednak, że jest to tylko błąd typograficzny.
- Strona 8: Po rozwinięciu mamy:

$$g(\eta) = E \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{T}}^2) + 2\eta E \operatorname{tr}\{\hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})\} + \eta^2 E \operatorname{tr}\{(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})^2\} - 2E \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{T}}\mathbf{\Gamma}) - 2\eta E \operatorname{tr}\{(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})\mathbf{\Gamma}\} + \operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}^2).$$

Z tego rozwinięcia wynika warunek

$$\frac{d}{d\eta} g(\eta) = 0,$$

czyli

$$E \operatorname{tr}\{(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})^2\}\eta = E \operatorname{tr}\{(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})\mathbf{\Gamma}\} - E \operatorname{tr}\{\hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})\}.$$

Jeżeli dodatkowo wykorzystać fakt, że $\hat{\mathbf{T}}$ i $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ mają te same bloki diagonalne, to $\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}}$ ma tylko bloki pozadiagonalne. Wtedy

$$\operatorname{tr}\{\hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})\} = 0.$$

W takim wypadku warunek upraszcza się do

$$\eta = \frac{E \operatorname{tr}\{(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})\mathbf{\Gamma}\}}{E \operatorname{tr}\{(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{T}})^2\}}.$$

Co nie jest zgodne ze wzorem (10).

- W symulacjach nie podano konkretnych macierzy $\mathbf{\Gamma}_1$ i $\mathbf{\Gamma}_2$, które zostały użyte w eksperymentach. Bez tego wyniki nie są w pełni replikowalne.

1.4 Manuskrypt [D]

Ten dokument na czas przygotowania recenzji niniejszej pracy doktorskiej był wysłany do czasopisma manuskrytem (na dokumencie widnieje data 06.05.2026). Zatem skoro nie jest to opublikowana praca naukowa, będę ten dokument traktował jak manuskrypt. Manuskrypt jest głównie algebraiczny, ale z pewnymi implikacjami dla estymacji parametrów. W niniejszym manuskrypcie udowodniono charakterystykę przestrzeni kwadratowej macierzy, tj. określono warunki konieczne i wystarczające, przy których przestrzeń liniowa macierzy blokowych staje się przestrzenią kwadratową. Ponadto określono postać rzutu macierzy symetrycznej na tę przestrzeń za pomocą rozkładu blokowo-spektralnego. Pokazano również, że rzutowanie standardowych estymatorów nieobciążonych i estymatorów największej wiarygodności na podprzestrzeń kwadratową macierzy blokowych daje dodatnio określony, dobrze uwarunkowany estymator o pożądanym własnościach statystycznych. Praca zawiera liczne wyniki algebraiczne z ich zastosowaniami. Pojawiły się jednak pewne niedociągnięcia:

- Strony 10 i 13: W tekście pojawia się określenie „the spaces $\mathcal{C}_{vw}$ ” oraz stwierdzenie, że są one wzajemnie ortogonalne. Jeżeli $\mathbf{\Gamma}_{ii'}$ są zmienne, to $\mathcal{C}_{vw}$ mogą być tylko zbiorami, a nie przestrzeniami liniowymi. Zbiory $\mathcal{C}_{vw}$ zdefiniowane z wykorzystaniem zmiennych macierzy ortog-

onalnych $\Gamma_{ii'}$ nie muszą być przestrzeniami liniowymi. Nie przeczy to bezpośrednio Twierdzeniu 3.2, które wymaga jedynie, aby właściwa przestrzeń bloków pozadiagonalnych $\mathcal{C}$ była liniową podprzestrzenią odpowiedniego zbioru. Problem występuje jednak w Przykładzie 3.1, gdzie cały nieliniowy zbiór $\mathcal{C}_{11}^{(III)}$ jest przedstawiony jako jeden z możliwych wyborów przestrzeni $\mathcal{C}$, a przynajmniej tak można mylnie zinterpretować ten przykład. W tym przykładzie powinno się zamiast tego wybrać konkretną liniową podprzestrzeń tego zbioru lub jednoznacznie wyjaśnić, że $\mathcal{C}_{11}^{(III)}$ jest jedynie zbiorem dopuszczalnych elementów, a nie samą przestrzenią liniową.

- W dowodzie Twierdzenia 3.2 pokazano osobno, że dla $\mathbf{C} \in \mathcal{C}_{vw}$ zachodzą odpowiednie warunki. Następnie stwierdza się, że warunki te zachodzą również dla dowolnych kombinacji macierzy z różnych $\mathcal{C}_{vw}$. To przejście jest dla mnie nie do końca jasne. Co prawda jest podany warunek, że w zbiorach J_{vw}^* żaden indeks i ani i' nie pojawia się więcej niż raz. Jednak nie jest jasne, czy zakaz powtarzania indeksów ma obowiązywać osobno w każdym J_{vw}^* , czy globalnie w całej sumie $J_{11}^* \cup J_{21}^* \cup J_{12}^* \cup J_{22}^*$. Jeśli tylko osobno, wyrazy mieszane mogą nie znikać.
- Na stronie 13 mamy $\mathcal{A} = \{a_0 \mathbf{I}_3 + a \mathbf{1}_3 \mathbf{1}_3^\top : a_0, a \in \mathbb{R}\}$ co daje macierze, które mają na diagonalu elementy równe $a_0 + a$, a na stronie 14 mamy macierze z elementami diagonalnymi równymi a_0 . To tylko drobiazg, ale powinno być na przykład $\mathcal{A} = \{(a_0 - a) \mathbf{I}_3 + a \mathbf{1}_3 \mathbf{1}_3^\top : a_0, a \in \mathbb{R}\}$.
- W Przykładzie 3.3(b), w definicji $\mathcal{C}_{22}$ zamiast $\mathbf{G} \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$ powinno być $\mathbf{G} \in \mathbb{R}_{3 \times 2}$.
- Strona 19: Jest odnośnik do wzoru numer (2.1), którego nie ma.

1.5 Artykuł [E]

Artykuł [E], podobnie jak artykuł [C], został opublikowany w czasopiśmie Statistical Papers (100 pkt. MNiSW) w 2025 roku. Praca dotyczy estymacji blokowej macierzy kowariancji o liniowo ustrukturyzowanych blokach, przy czym autorzy proponują estymator typu shrinkage oparty na rzucie estymatora próbkowego na liniową przestrzeń struktur oraz na wyborze celu z pewnej kwadratowej podprzestrzeni tej przestrzeni. Główny pomysł jest interesujący i matematycznie uzasadniony, na poziomie koncepcyjnym rzut na liniową przestrzeń zapewnia wymaganą strukturę, a modyfikacja w stronę dobrze dobranej podprzestrzeni kwadratowej ma poprawiać dodatnią określoność i uwarunkowanie estymatora. Własności skończenie próbkowe są badane w symulacjach, a ponadto podano również przykład praktycznego zastosowania rozważanych metod (Przykład 2). Artykuł zawiera wartościowy i interesujący pomysł estymacji liniowo ustrukturyzowanych, blokowych macierzy kowariancji. Główna konstrukcja jest sensowna, a przykłady i symulacje dobrze ilustrują kompromis między uwarunkowaniem estymatora a jego własnościami statystycznymi. Pewne uwagi są następujące:

- W dowodzie Twierdzenia 2, “with m degrees of freedom” powinno być zastąpione przez “with $n - 1$ degrees of freedom” jak też jest podane poniżej. To nie jest wielki problem, ale niepotrzebnie wprowadza zamieszanie.
- W dowodzie Twierdzenia 3 granice pod znakiem wartości oczekiwanej i formułują przejścia typu $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\Sigma}] = E[\lim_{n \rightarrow \infty} \dots]$ bez uzasadnienia wymiany granicy i wartości oczekiwanej.
- W dowodzie Twierdzenia 3, jak należy rozumieć zbieżność $E[\hat{\Sigma}]$, gdzie $\hat{\Sigma}$ jest macierzą?
- Po wzorze (12) jest napisane, że w symulacjach przyjmowany jest próg $\kappa_0 = 300$. Natomiast w opisie symulacji w Przykładach 1 i 2 wskazane jest, że dodatkowa korekta jest stosowana, gdy κ przekracza 100 albo gdy estymator nie jest dodatnio określony.

2 Ocena ogólna

Tematyka pracy jest dobrze umocowana w literaturze, a motywacja do takich rozważań ma podstawy teoretyczne jak i praktyczne. Uzyskane wyniki są ciekawe zarówno z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia. Należy wyróżnić Autorkę za próbę połączenia formalnych narzędzi algebraicznych z praktycznym problemem identyfikacji struktury kowariancji. Ponadto metody rozważane w rozprawie dopuszczają różne wymiary bloków diagonalnych macierzy blokowej co nie jest często spotykane w literaturze. Rozprawa zawiera wiele oryginalnych wyników dotyczących różnych estymatorów blokowej macierzy kowariancji (estymatory największej wiarygodności, najmniejszych kwadratów, typu shrinkage), w tym ich własności teoretycznych i praktycznych. Warstwa tematyczna rozprawy jest spójna i logicznie poprowadzona: od jasnego zdefiniowania celów badawczych, przez preliminaria oraz krótkie zestawienie głównych wyników, po treści czterech artykułów naukowych oraz jednego manuskryptu przesłanego do czasopisma, które zawierają wszystkie uzyskane wyniki i przeprowadzone badania. Takie ułożenie rozdziałów pracy jest adekwatne do jej formy. Części wprowadzające i łączące publikacje dobrze porządkują narrację.

Artykuły, stanowiące element rozprawy doktorskiej, zostały opublikowane w czasopismach naukowych o dobrej renomie oraz punktowanych przez MNiSW. Wkład Kandydatki w poszczególne prace naukowe oceniam jako istotny i tym samym uzasadniający ubieganie się przez Nią o stopień naukowy doktora na bazie tych prac. Na podstawie informacji o podziale wkładu autorskiego stwierdzam, że Kandydatka była odpowiedzialna za kluczowe etapy powstawania prac, m.in. formułowanie i dowodzenie wyników matematycznych, opracowanie i implementację oprogramowania w języku R, badania symulacyjne, analizę danych rzeczywistych, interpretację wyników, przygotowanie oryginalnego tekstu manuskryptów oraz przegląd literatury. Wkład ten potwierdza pełną dojrzałość badawczą, biegłość w posługiwaniu się różnymi narzędziami badawczymi oraz umiejętność samodzielnego planowania i prowadzenia badań naukowych. Widać również postęp od pierwszej do ostatniej pracy, zarówno pod względem merytorycznym, jak i dojrzałości prac - według podanych wkładów poszczególnych autorów, to Kandydatka była głównie odpowiedzialna za przygotowanie treści prac.

Przedstawione w rozprawie wyniki i ich dowody potwierdzają, że Kandydatka dysponuje szeroką wiedzą teoretyczną z zakresu statystyki matematycznej, analizy wielowymiarowej, rachunku macierzowego i wybranych zagadnień algebry liniowej. W rozprawie, Autorka z powodzeniem stosuje aparat matematyczny, a głównie:

- pochodne macierzowe (np. dowód Twierdzenia 3.1 w artykule [B]),
- rozwiązywanie równań macierzowych (np. Twierdzenie 3.1 w pracy [A]),
- zastosowania wyników dotyczących majoryzacji macierzy (np. dowód Stwierdzenia 2.2 w manuskrypcie [D]),
- przekształcenia wyrażeń macierzowych (np. Twierdzenie 5 w artykule [C]),
- zastosowanie własności wartości oczekiwanej, w szczególności nierówności Jensena (np. dowód Twierdzenia 1 w pracy [E]),
- zastosowanie własności podprzestrzeni liniowych (np. dowód Twierdzenia 1 w pracy [E]).

Dodatkowo miałbym następujące komentarze ogólne:

1. We wszystkich pracach zakładana jest wielowymiarowa normalność obserwacji. Tylko w manuskrypcie [D] jest wspomniane o możliwym badaniu estymatorów na innych rozkładach, jednak jest to jedynie uwaga na bazie innych cytowanych prac naukowych, nie ma własnego

badania tej kwestii. Natomiast, założenie normalności nie musi być spełnione w praktyce. Ciekawe jest zatem zagadnienie odporności na odstępstwa od normalności zaproponowanych metod.

2. W rozprawie wielokrotnie wspomina się o możliwym zastosowaniu metod dla specyficznych struktur kowariancyjnych do danych wysokowymiarowych. Jednak w rozprawie takie przypadki nie są rozważane, a ponadto często zakłada się dodatnią określoność estymatora $\mathbf{S}$, co wymaga większej liczby obserwacji niż wymiar obserwacji. Interesujące jest, czy metody rozważane w rozprawie można wykorzystać/zmodyfikować/rozszerzyć do przypadku wysokiego wymiaru.
3. W pracy doktorskiej przedstawiono dwa przykłady zastosowań (w pracach [C] i [E]). Nie jest to najważniejsza kwestia niniejszej rozprawy, ale ciekawe jest na ile problematyczne jest pozyskanie danych, które można sensownie analizować rozważanymi metodami.
4. Szkoda, że rozprawa nie została uzupełniona o wydajne oprogramowanie, które pozwoliłoby na szybkie wykorzystanie rozważanych metod.

3 Konkluzja

Podsumowując, w mojej ocenie przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska Pani mgr Malwiny Mrowińskiej pt. „*Estimation of a block-structured covariance matrix*” spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim, określone w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2024 r. poz. 1571 t.j.). Recenzowana rozprawa stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, jakim jest problem estymacji blokowej macierzy kowariancji, oraz dowodzi ogólnej wiedzy teoretycznej Autorki pracy w zakresie matematyki oraz umiejętności samodzielnego prowadzenia badań naukowych. Wnoszę zatem o dopuszczenie Pani mgr Malwiny Mrowińskiej do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Lubon Smaga