

Prof. dr hab. Jerzy Kąkol

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 22 kwiecień 2026

**RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ
MGR MACIEJA KORPALSKIEGO**

**O izomorficznych i geometrycznych własnościach przestrzeni
Banacha funkcji ciągłych**

Rozprawa doktorska Pana Macieja Korpalskiego dotyczy badań geometrycznych i izomorficznych własności rzeczywistych przestrzeni Banacha $C(X)$ nad zwartymi przestrzeniami X . Choć sam tytuł rozprawy sugeruje zakwalifikowanie jej tematycznie w obszarze analizy funkcjonalnej, to aparat matematyczny stosowany w rozprawie mocno przecina się z wieloma aspektami topologicznymi, teorio-mnogościowymi czy też z zagadnieniami wokół teorii miary. Jest to zrozumiałe gdy stawiane w rozprawie problemy i pytania wymagają szeregu pomysłów i subtelnych rozważań na styku różnych gałęzi współczesnej matematyki.

Rozprawa doktorska (składająca się z pięciu rozdziałów i obejmująca 73 stron tekstu) oparta jest na wynikach naukowych uzyskanych w następujących czterech oryginalnych artykułach naukowych:

1. A. Avides, **M. Korpalski**, *Barely alternating real almost chains and extension operators for compact lines*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. Racam 118 (2021) (148), 7.

2. **M. Korpalski**, G. Plebanek, *Countable discrete extensions of compact lines*, Fund. Math. 265 (2024), 75-93.

3. **M. Korpalski**, G. Plebanek, *Bounds for Banach-Mazur distances between some $C(K)$ -spaces*, 2025, preprint at arxiv.org/abs/2511.03435.

4. **M. Korpalski**, G. Plebanek, *How many miles from L_∞ to ℓ_∞ ?*, 2025, preprint at arxiv.org/abs/2511.12672.

Pierwsze dwa rozdziały omawianej rozprawy doktorskiej mają charakter wprowadzający w problematykę rozprawy; przypominają szereg ogólnych faktów, definicji i podstawowych informacji na temat przestrzeni Banacha $C(X)$ ciągłych funkcji rzeczywistych na zwartych przestrzeniach X .

Punktem wyjścia rozważań są dwa fundamentalne twierdzenia Bessagi-Pelczyńskiego oraz Miljutina podające charakteryzacje izomorficznych

przestrzeni Banacha $C(X)$ dla przeliczalnych i nieprzeliczalnych zwartych przestrzeni metrycznych X .

Przejdę obecnie do opisanie głównych rezultatów naukowych zawartych w pozostałych rozdziałach 3-5 omawianej rozprawy doktorskiej.

Rozdział trzeci dotyczy badań nieośrodkowych przestrzeni Banacha $C(X)$ wokół następującego ważnego problemu a rozwijanych intensywnie w ostatnich 20-latach przez szereg specjalistów:

Problem 1. Czy dla niemetryzowalnej przestrzeni zwartej K istnieje nietrywialna skrecona suma prosta X przestrzeni Banacha $C(K)$ oraz c_0 stowarzyszona z krótkim ciągiem dokładnym $0 \rightarrow c_0 \rightarrow X \rightarrow C(K) \rightarrow 0$?

Problem ten był badany między innymi przez Avilesa, Drygiera, Marciszewskiego, Plebanka, Tauska Castillo, Correa, i innych. Okazuje się (jak zauważyli Aviles, Marciszewski i Plebanek (2018)), że dla uzyskania poszukiwanej przestrzeni X w Problemie 1 można rozważyć tzw. *countable discrete extension* $L \supset K$ z własnością \mathcal{E} , co jest już równoważne temu, że $C(L)$ jest sumą skreconą przestrzeni $C(K)$ oraz c_0 . Pan Korpalski koncentruje się w tej części pracy na zwartych prostych K , naturalnych przykładach niemetryzowalnych przestrzeni, których funkcyjne odpowiedniki $C(K)$ były intensywnie badane przez szereg specjalistów w tej tematyce.

Aby przedstawić szereg wyników uzyskanych przez doktoranta przypomnijmy pewne istotne pojęcia. Dla zwartej przestrzeni K przez *countable discrete extension* L rozumiemy przestrzeń $L \supset K$, która jest zwarta oraz $L \setminus K$ jest nieskończonym przeliczalnym dyskretnym zbiorem ω . Piszemy wówczas $L \in CDE(K)$. Dla pary zwartych przestrzeni $K \subset L$ przez $\eta(K, L)$ rozumie się infimum norm wszystkich operatorów rozszerzeń $E : C(K) \rightarrow C(L)$. Główne wyniki tej części rozprawy koncentrują się wokół (w niektórych przypadkach ośrodkowych) zwartych prostych K . Dla pełniejszego obrazu przypomnijmy:

Definition 2. Dla zwartej przestrzeni K oraz $L \in CDE(K)$ mówimy że: (1) L ma własność \mathcal{R} jeżeli istnieje ciągła retrakcja $r : L \rightarrow K$. (2) L ma własność \mathcal{E} jeżeli $\eta(K, L) < \infty$.

W części trzeciej rozprawy autor przedstawia szereg lematów pomocniczych wraz z dowodami i dodatkowymi informacjami o motywacjach wokół tych faktów. Lematy dostarczają dodatkowych ważnych dyskusji na temat własności relacji $L \in CDE(K)$ oraz roli własności \mathcal{E} oraz \mathcal{R} w tej tematyce.

Przytoczę najważniejsze wyniki tej omawianej trzeciej części rozprawy (transparentnie autor zestawia to w paragrafie 3.1.2).

(1) Dla $L \in CDE(K)$ albo L ma własność (R) (co oznacza, że $\eta(K, L) = 1$) lub $\eta(K, L) \geq 3$.

(2) Jeżeli $L \in CDE(K)$ oraz $\eta(K, L) < 5$, to $\eta(K, L) \leq 3$.

(3) Jeżeli $w(K) \geq \omega_1$, to istnieje $L \in CDE(K)$, że $\eta(K, L) = 3$. Z drugiej strony, jeżeli K jest niemetryzowalna ośrodkowa zwarta prosta, to istnieje $L \in CDE(K)$ również spełniająca warunek $\eta(K, L) = 3$.

(4) Przy założeniu $MA(\omega_1)$ oraz $w(K) = \omega_1$ dla każdego $L \in CDE(K)$ mamy $\eta(K, L) \leq 3$.

Ostatni wynik z tej serii (być może najciekawszy) orzeka, że jeśli $\kappa \geq non(\tau)$, to istnieje zero-wymiarowa ośrodkowa zwarta prosta K , że $w(K) = \kappa$ lecz **bez własności** \mathcal{E} . Wspomnieć należy, że $non(\tau)$ oznacza minimalną liczbę kardynalną zbioru $X \subset [0, 1]$ którego nie można pokryć przeliczalną rodziną domkniętych zbiorów zerowych.

Rozdział czwarty odnosi się do badań dotyczących następującego dobrze motywowanego problemu.

Problem 3. Niech $K_1, K_2, \dots, K_n, L_1, L_2, \dots, L_k$ będzie skończonym układem zwartych prostych, $n > k$.

- (1) Czy $C(\prod_{i=1}^n K_i)$ oraz $C(\prod_{j=1}^k L_j)$ są izomorficzne?
- (2) Czy $C(\prod_{i=1}^n K_i)$ wkłada się izomorficznie w $C(\prod_{j=1}^k L_j)$?
- (3) Czy istnieje ciągła liniowa surjekcja $C(\prod_{i=1}^n K_i) \rightarrow C(\prod_{j=1}^k L_j)$?

Jak wspomnieliśmy Problem 3 jest dobrze motywowany szeregiem pytań z przed wielu lat; warto wspomnieć klasyczne pytanie (Banach) czy $C([0, 1])$ oraz $C([0, 1]^2)$ są izomorficzne, a odpowiedź na nie (Miljutin) rozpoczęło intensywne badania wokół tej tematyki.

Z uwagi na wcześniejsze rezultaty Martineza-Cervantesa, Plebanka oraz Michalaka, Problem 3 (1) pozostaje do zbadania gdy wszystkie zwarte proste K_i, L_j są nieośrodkowe (oraz mają nieprzeliczalny charakter). Okazuje się, że publikacja Semadeniego (1960) dostarczyła nowych narzędzi dowodowych oraz pojęć, które dobrze się sprawdziły w pracach nad Problemem 3.

Punktem wyjścia jest wykorzystanie pojęcia κ -pochodnej Semadeniego-Pelczyńskiego (κ -Semedeni-Pelczyński derivative), $SP_\kappa(X) = \kappa X/X$, gdzie $\kappa X \subset X^{**}$ składa się z weak*-ciągłych funkcyjonałów na podprzestrzeniach o gęstości κ . To pojęcie motywowało wprowadzenie tzw. κ -wymiaru Semadeniego-Pelczyńskiego (κ -Semadeni-Pelczyński dimension) $sp_\kappa(X)$.

Oba pojęcia zostały wykorzystane w badaniu Problemu 3. Interesujący fakt zawarty w Lemacie 4.4.3 pokazuje, że zachodzi relacja $SP_\kappa(C(K)) \cong c_0(K \uparrow)$ dla dowolnej zwartej prostej K .

Te oba pojęcia zostały również wykorzystane do pokazania alternatywnego dowodu twierdzenia Galego podającego izomorficzną klasyfikację przestrzeni Banacha $C(2^\theta \times [0, \lambda^+])$ (Theorem 4.4.8).

Główny wynik czwartego rozdziału upatruję w Twierdzeniu 4.5.2, które dostarcza bardzo ciekawe konsekwencje:

Dla zwartych prostych K_1, K_2, L o nieprzeliczalnych charakterach przestrzeni $C(L)$ nie da się odwzorować za pomocą liniowego ciągłego odwzorowania na $C(K_1 \times K_2)$ jak również $C(K_1 \times K_2)$ nie wkłada się izomorficznie w $C(L)$.

Zacytuję to ciekawe twierdzenie 4.5.2.

Theorem 4. *Niech $K = \prod_{i=1}^n K_i$ będzie produktem zwartych prostych, niech $n \in \omega$ i niech $\chi(K_i) > \kappa$, $i \leq n$. Wówczas Semadeni-Pelczyński κ -wymiar dla $C(K)$ wyraża się wzorem $sp_\kappa(C(K)) = n$.*

Rozdział czwarty zamyka się wartościowymi uwagami o charakterze uzupełniającym a dotyczącymi prostych Suslina czy podwójnej strzałki (double-arrow space) w kontekście tematyki rozdziału. Wyróżniłbym taką uwagę: Jeżeli K jest zwartą przestrzenią nierozproszoną (wówczas $C(K)$ nie jest przestrzenią Asplunda z twierdzenia Namioki-Phelpsa), to $C(\mathbb{S}) \not\cong C(\mathbb{S} \times K)$, gdzie \mathbb{S} jest podwójną strzałką.

Rozdział piąty rozprawy dotyczy badania dystansu Banacha-Mazura pomiędzy przestrzeniami Banacha $C(K)$ oraz $C(L)$.

Tematyka ta, mocno osadzona w liniowej analizie funkcjonalnej, jest motywowana wieloma głębokimi wynikami, które sięgają poprzedniego wieku. Przypomnijmy, że dla przestrzeni Banacha X oraz Y definiujemy $d(X, Y) = \inf_T \|T\| \|T^{-1}\|$, gdzie infimum jest brane dla wszystkich izomorfizmów $T : X \rightarrow Y$.

Klasyczny wynik Amira-Camberna pokazuje, że następująca nierówność $d(C(K), C(L)) < 2$ implikuje, że przestrzenie K oraz L są homeomorficzne, a więc $C(K)$ oraz $C(L)$ są izometryczne.

Pan Korpalski kontynuuje ten temat badawczy poszukując nowych wartości oszacowań $d(C(K), C(L))$ dla szeregu par zwartych przestrzeni K oraz L . Niewątpliwie, nieco techniczny, Lemat 5.3.2 (a będący rozwinięciem metody Gordona, Gergonta oraz Piaseckiego) dostarcza nowych technik szacowania dolnych ograniczeń dla $d(C(K), C(L))$.

W pierwszej części tego bardzo interesującego rozdziału rozprawy autor koncentruje się głównie na szacowanie dystansu $d(C([0, \omega] \times k, C[0, \omega]))$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Motywacją tej części pracy jest niewątpliwie elegancki wynik (będący połączeniem prac Candino, Galego, Malca i Piaseckiego) pokazujący (*)

$$d(C([0, \omega]^m), C([0, \omega])) = m + \sqrt{(m-1)(m+3)}, \quad m \geq 1.$$

Wspomniany Lemat 5.3.2 został wykorzystany przez Pana Korpalskiego do uzyskania następującego szacowania dla dowolnej zwartej przestrzeni K przy założeniu $K^{(m)} \neq \emptyset$. Wówczas uzyskuje się

$$d(C(K), C[0, \omega]) \geq m + \sqrt{(m-1)(m+3)}.$$

W ten sposób pojawia się elegancka metoda uzyskania dolnego szacowania podanego w (*) w sytuacji bardziej ogólnej. Przypadek $C([0, \omega] \times 3)$ jest wzmocniony szacowaniem (ograniczeń górnych i dolnych) przy wykorzystaniu MATHEMATICA.

Przejdźmy do omówienia dalszych naukowych rezultatów doktoranta które dotyczą przypadku gdy przestrzenie zwarte K oraz L nie są przeliczalne. Chodzi tu głównie o szacowanie $d(L_\infty[0, 1], \ell_\infty)$. Jest to ambitne wyzwanie, bo raczej mało wiadomo o tym przypadku. Szereg dodatkowych lematów i szacowań (szczególnie techniczne Twierdzenie 5.4.5) pozwoliło Panu Korpalskiemu uzyskać następujące szacowania:

$$7.41 < d(L_\infty[0, 1], \ell_\infty) \leq (3 + \sqrt{2})^2 < 19.49.$$

Szereg wypracowanych przez doktoranta dodatkowych (ciekawych) lematów pozwolił również uzyskać następujące szacowanie dla zwartych przestrzeni Pełczyńskiego L :

$$3 + 2\sqrt{2} \leq d(C(L), C(2^\omega)) \leq (3 + 2\sqrt{2})^2.$$

Reasumując, uzyskane wyniki naukowe w ramach rozprawy doktorskiej, częściowo już opublikowane w znaczących czasopismach o zasięgu międzynarodowym, wyraźnie wskazują, że doktorantowi mgr Maciejowi Korpalskiemu udało się uzyskać znaczące rezultaty naukowe stanowiące oryginalny i istotny wkład w rozwój tej interesującej tematyki. Rozprawa doktorska jest napisana i zredagowana w sposób jasny i przejrzysty.

W związku z powyższym uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska *O izomorficznych i geometrycznych własnościach przestrzeni Banacha funkcji ciągłych* spełnia wszystkie wymagania ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie Pana mgr Macieja Korpalskiego do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka. Ponadto uważam, że rozprawa doktorska zasługuje na wyróżnienie.

Jerzy Kępczyński