

prof. dr hab. Anna Talarczyk-Noble
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Krzysztofa Kowalskiego "Asymptotyczne zachowanie ekstremalnej pozycji w gałęzkowym spacerze losowym".

Wstęp

Rozprawa poświęcona jest badaniu zachowania ekstremalnej pozycji gałęzkowego spaceru losowego. Badanie tego typu zagadnień ma długą historię. Zajmowali się nim autorzy tacy jak np. Biggins (1976), Durrett (1979, 1983), Gantert (2000). Nowsze prace na ten temat pochodzą z ostatnich lat, np. kilka prac Dyszewskiego, Gantert i Höfelsauera po 2020r. Jest też bogata literatura dotycząca pokrewnych zagadnień z czasem ciągłym - np. gałęzkowego ruchu Browna oraz związków z równaniem KPP (Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov). W tym kontekście badania przedstawione w niniejszej rozprawie wpisują się w ważny nurt w teorii prawdopodobieństwa i dotyczą aktualnych zagadnień.

Modele rozważane w rozprawie są uogólnieniami następującego, prostszego modelu gałęzkowego: W chwili początkowej mamy jedną cząstkę położoną w punkcie 0 na prostej rzeczywistej. W chwili 1 cząstka ta dzieli się na cząstki potomne, a sama ginie. Rozkład ilości cząstek potomnych jest nadkrytyczny (ma średnią $m > 1$). Ponadto, każdy z potomków niezależnie przemieszcza się w stosunku do pozycji rodzica. Rozkład przemieszczenia jest ustalony i taki sam dla każdej cząstki. Następnie, w kolejnej chwili każda z cząstek potomnych ewoluuje zgodnie z tym samym mechanizmem, niezależnie od przeszłości i pozostałych cząstek. Cząstki są indeksowane przez $v \in \mathbb{T}$, gdzie $\mathbb{T}$ ma strukturę drzewa kodującego genealogię cząstek. Niech R_n oznacza maksymalną pozycję cząstki z n -tego pokolenia, tj.

$$R_n = \max_{|v|=n} S_v,$$

gdzie S_v jest położeniem cząstki v , a $|v|$, mówi z której generacji pochodzi ta cząstka. Bada się asymptotyczne zachowanie R_n , gdy n dąży do nieskończoności. Oznaczmy przez $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ niezależne kopie zmiennej losowej ξ , opisującej przesunięcie dziecka względem rodzica i niech N będzie zmienną losową o rozkładzie takim jak liczba potomków pojedynczej cząstki, gdzie N niezależne od ciągu $(\xi_i)_i$. Klasyczny wynik Bigginsa z 1976r pokazuje, że jeżeli

$$\nu(\theta) = E \left(\sum_{i=1}^N e^{\theta \xi_i} \right) \quad (1)$$

jest skończone dla pewnego $\theta > 0$, to R_n rośnie liniowo z n i $\frac{R_n}{n}$ zbiega prawie na pewno do stałej (zachodzi mocne prawo wielkich liczb).

W 2000 roku Gantert pokazała, że jeżeli zmienne ξ_i są semiwykładnicze, tj.

$$P(\xi > x) = a(x) \exp(-L(x)x^r), \quad (2)$$

gdzie $r \in (0, 1)$ oraz L i a są funkcjami wolno zmieniającymi się w nieskończoności, to R_n rośnie szybciej niż liniowo i zachowuje się jak $b_n = n^{\frac{1}{r}} \tilde{L}(n^{\frac{1}{r}})$, gdzie $\tilde{L}$ jest pewną funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności. $\frac{R_n}{b_n}$ zbiega prawie na pewno.

Jeszcze wcześniej, w 1983r Durrett udowodnił, że, gdy ξ ma cięższy ogon, tj. gdy jest on regularnie zmieniający się w nieskończoności. W 1983r Durrett wykazał, że R_n rośnie wtedy wykładniczo oraz po odpowiednim unormowaniu nie zbiega do stałej, ale do pewnego nietrywialnego rozkładu.

W rozprawie doktorskiej omawiane są analogiczne zagadnienia dla różnego rodzaju uogólnień takiego modelu. W rozdziale 2 i 3 badane są uogólnienia wyników Durretta oraz Gantert w przypadku gdy cząstki mogą być kilku różnych typów. W rozdziale 4 rozważa się układ jednego typu, ale z zaburzeniami. Poniżej opiszę dokładniej te wyniki.

Zawartość pracy i ocena

W Rozdziałach 2 i 3 badany jest model, w którym cząstki mogą być wielu różnych typów (liczba typów jest skończona $= d$). Zarówno liczba potomków, jak i typy cząstek potomnych i ich przesunięcia zależą od typu rodzica. Cząstka typu i ma N_{ij} potomków typu j . Przesunięcie cząstki potomnej w stosunku do rodzica zależy od typu cząstki. Badany jest model odpowiadający przypadkowi nadkrytycznemu, tj. zakłada się, że macierz $M = (EN_{ij})_{i,j=1}^d$ ma największą wartość własną $\rho > 1$. Nakłada się też pewne założenia gwarantujące nie wymieranie układu z prawdopodobieństwem 1. W rozdziale 2 badany jest model wielotypowy przy założeniu nieredukowalności.

Rozdział 2.1 dotyczy przypadku, gdy rozkłady przesunięcia mają ogony regularnie zmieniające się w nieskończoności. Głównym twierdzeniem w tej części jest Twierdzenie 2.1. Stanowi ono uogólnienie Twierdzenia Durretta. Zakłada się, że dla cząstek każdego typu, odpowiedni rozkład przesunięcia w stosunku do rodzica ma ogon regularnie zmieniający się w nieskończoności, z parametrem zależnym od typu cząstki, a ponadto, że jest tylko jeden typ z najcięższym ogonem. Pokazuje się, że wtedy odpowiednią normalizacją dla R_n jest a_n takie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n (1 - F_I(a_n)) = 1, \quad (3)$$

gdzie ρ jest największą wartością własną macierzy M a F_I dystrybuantą mającą najcięższy ogon spośród dystrybuant odpowiadających różnym typom. Przy takiej normalizacji otrzymuje się zbieżność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_n \leq a_n x) = \mathbb{E} \left[e^{-\zeta W x^{-r}} \right], \quad \forall x > 0, \quad (4)$$

ζ jest stałą daną w twierdzeniu, W zmienną losową pojawiającą się w granicy unormowanej liczby cząstek, a r - indeksem typu odpowiadającego dystrybuancie o najcięższym ogonie.

Idea dowodu jest podobna jak w przypadku jednego typu (i dość typowa dla rozkładów o ciężkich ogonach). Okazuje się, że R_n jest porównywalne z maksimum wszystkich przesunięć, jakie nastąpiły do generacji n . Używane są też pewne pomysły z rozumowania Durretta, jednak wielotypowość znacząco komplikuje sytuację, dlatego nie jest to proste uogólnienie.

W rozdziale 2.2 rozprawy rozważa się analogiczny wielotypowy model, ale będący uogólnieniem modelu rozważanego przez Gantert - z rozkładami przesunięć mającymi rozkłady semieksponencjalne tj. postaci (2), ale z różnymi r_i - zależnie od typu cząstki, $i = 1, \dots, d$. Przy czym tym razem może być kilka typów o takim samym zachowaniu ogona. Tu również okazuje się, że najbardziej istotne znaczenie ma zachowanie najcięższych ogonów, a wynik (mocne prawo wielkich liczb) jest analogiczny do tego w pracy Gantert. Twierdzenie 2.5 pokazuje, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{\varphi(n)} = (\log \rho)^{\frac{1}{r}}, \quad p.n.$$

gdzie $\varphi(n)$ zachowuje się jak $n^{\frac{1}{r}} K(n^{\frac{1}{r}})$, dla pewnej funkcji wolno zmieniającej się K , a r jest najmniejszym r_i .

Jest to rozszerzenie wyników Gantert. W dowodzie wykorzystuje się też wyniki Athreyi i Vidyashankara dotyczące asymptotyki liczby cząstek różnych typów w wielotypowym procesie gałęzowym.

Czytając Rozdział 2.1 miałam wrażenie, że notację można by nieco uprościć korzystając ze stochastycznej dominacji i zastępując wszystkie pozostałe dystrybuanty poza tą o najcięższym ogonie albo przez $\max_{j \neq I} F_j(t)$ albo przez $\min_{j \neq I} F_j(t)$, w zależności od tego czy dowodzi się oszacowania górnego czy dolnego (jak w pracy I oznacza indeks odpowiadający dystrybucji o najcięższym ogonie). Podobnego typu rozumowania pojawiają się np. na stronie 29, wydaje się jednak, że zastosowanie podobnego argumentu prawie na samym początku Rozdziału 2.1 pozwoliłoby nieco uprościć notację. Sądzę też, że dowody twierdzeń z rozdziału drugiego dałoby się dość łatwo przenieść na przypadek, zakłada się albo regularną zmienność albo, odpowiednio, semieksponencjalność dystrybuanty o najcięższym ogonie, a pozostałe ogony są po prostu "łżejsze" - w odpowiednim sensie.

Oba przypadki rozważane w Rozdziale 2 dotyczą gałązkowych błędzeń nieprzywiedlnych. Wprowadzenie większej ilości typów prowadzi do technicznego skomplikowania problemu, jednak idea wydaje się zgodna z wcześniej znanymi wynikami w przypadku cząstek jednego typu.

Dużo ciekawiej przedstawia się sytuacja w Rozdziale 3. Rozważane są tu spacery gałązkowe wielotypowe, analogiczne do tych z Rozdziału 2 (tj. przypadek ogonów regularnie zmieniających się, albo semiwykładniczych), ale tym razem w sytuacji, gdy nieprzywiedlności nie ma.

W Twierdzeniu 3.1, odpowiadającym regularnie zmieniającym się ogonom, widzimy ciekawy fenomen, że nie koniecznie typ o rozkładzie przesunięcia z najcięższym ogonem jest dominujący. Postać granicy ma podobną formę jak w (4), ale tym razem r niekoniecznie musi być najmniejszym spośród r_i opisujących ogony rozkładów przesunięć różnych typów. Istotna jest zależność pomiędzy zachowaniem ogona rozkładu przesunięcia, a asymptotycznym zachowaniem liczby cząstek danego typu.

W przypadku ogonów semieksponencjalnych (Twierdzenie 3.5) już nie ma aż tak istotnych zmian - tu znów najcięższe ogony są dominujące i mamy odpowiednik Twierdzenia 2.5 z normalizacją tego samego rzędu. Zmienia się jednak stała otrzymywana w granicy.

Generalnie, wyniki rozdziału 3 wydają mi się najciekawsze. Część ta jest też chyba najtrudniejsza pod względem technicznym.

Ostatni, 4 Rozdział poświęcony jest nieco innemu zagadnieniu, a mianowicie spacerom losowym z zaburzeniem, gdzie pozycja cząstki v dana jest przez

$$S_v^*(\theta) = S_v + X_v(\theta), \quad (5)$$

gdzie S_v jest pozycją cząstki v w przypadku zwykłego, jednowymiarowego błędzenia losowego z jednym tylko typem, a $X_v(\theta)$ jest niezależnym zaburzeniem, $\theta > 0$ jest parametrem. Zakłada się, że rozkład zaburzeń jest taki sam dla wszystkich cząstek i ma specjalną postać, tzn. ma rozkład zależny od parametru $\theta > 0$ oraz

$$X_v(\theta) \stackrel{d}{=} \frac{1}{\theta} \log \frac{Y_v}{E_v},$$

gdzie E_v jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, a rozkład Y_v ma pewien ustalony rozkład μ . Tego typu model był rozważany wcześniej w pracy Bandyopadhyaya i Ghosha z 2023r. Główne uogólnienie w stosunku do wyników z powyższej pracy polega na rozważeniu przypadku, gdy rozkład μ ma nieskończoną średnią, w szczególności, gdy jego ogon w nieskończoności zachowuje się asymptotycznie jak $x^{-\gamma}$ dla $\gamma \in (0, 1)$. O błędzeniu losowym S_v zakłada się, że funkcja ν zdefiniowana w (1) jest skończona w pewnym otoczeniu zera, a ponadto spełnione są dodatkowe warunki (L1) i (L2) str. 53

Tym razem bada się nie tylko zbieżność prawie na pewno $\frac{R_n^*(\theta)}{n}$ (Twierdzenia 4.1 i 4.2), ale również asymptotykę drugiego rzędu (Twierdzenia 4.3, 4.4 i 4.5). Wyniki Rozdziału 4 pracy zostały opublikowane w artykule w ESAIM Probab.Stat. (jednoautorskim).

Zabrakło mi tu jakiejs dyskusji o postaci zaburzenia. Dlaczego akurat takie jest ciekawe? Jaka jest motywacja? Bo jednak postać ta jest dość specjalna. Z dowodu jest jasne, że obecność zmiennych wykładniczych sporo upraszcza, gdyż można skorzystać z faktu, że minimum niezależnych zmiennych o rozkładzie wykładniczym ma znów rozkład wykładniczy z parametrem

będącym sumą odpowiednich parametrów. Pozwala to udowodnić (4.8), sprowadzając problem do rzeczy lepiej zbadanych i w konsekwencji udowodnić nie tylko rodzaj prawa wielkich liczb, ale nawet zbadać asymptotykę drugiego rzędu.

Jednak dużo bardziej naturalną wydawałaby się próba zbadania np. asymptotyki R_n^* gdy zaburzenie miałoby postać $\log Y_v$, gdzie Y_v ma ogon regularnie zmieniający się w nieskończoności.

Można zauważyć, że w Twierdzeniu 4.1 istotna jest wielkość $\theta\gamma$ i fakt czy jest ona większa czy mniejsza od θ_0 . Widać, że przy założeniu (H), ogon dystrybuanty zmiennej losowej $Y_v^{\frac{1}{\theta}}$ zachowuje się w nieskończoności jak $x^{-\theta\gamma}$, natomiast $E_v^{\frac{1}{\theta}}$ ma dużo lżejszy ogon i mamy $X_v(\theta) = \log(Y_v^{\frac{1}{\theta}}) - \log(E_v^{\frac{1}{\theta}})$. Naturalne jest pytanie, czy w tym zaburzeniu można opuścić część z eksponentą i dostać analogiczny wynik.

Dowody wydają się poprawne - nie znalazłam jakichś istotnych błędów. Jest trochę literówek i nie całkiem ścisłych sformułowań. Przykładowo: Literówki występują nawet w głównych twierdzeniach, np. w Twierdzeniu 2.1 pojawia się q , a powinno to być r . W sformułowaniu powinno też być powiedziane, dla jakich x twierdzenie zachodzi. To samo w Twierdzeniu 3.1.

W (1.1) powinno być N zamiast n , str 23 koniec l. 6 i l. 8 zamiast M_n powinno być M^n .

W kilku miejscach wołałabym widzieć dokładniejsze sformułowania czy opisy. Np. brak jest formalnego opisu drzewa T . Czasami brakowało mi też odsyłaczy do wcześniej wprowadzonych oznaczeń, zwłaszcza, że różnego rodzaju oznaczeń jest dość dużo. Mogłoby pomóc np. zamieszczenie spisu oznaczeń.

Z kolei są również miejsca niepotrzebnie skomplikowane. Np. bardzo długi jest dowód tego, że prawa strona (2.19) szacuje się przez $R(h, y)^n e^{-hx}$, podczas gdy wynika to po prostu z faktu, że dla niezależnych zmiennych losowych $\eta_1, \dots, \eta_n$

$$E e^{\sum_{j=1}^n h \eta_j} = \prod_{j=1}^n E e^{h \eta_j}.$$

Należy przyjąć, że η_j ma rozkład z dystrybuantą $\frac{F_j^y(\cdot)}{F_j(y)}$ dla odpowiednich indeksów j (o ile $F_j(y) > 0$, jeśli któreś jest równe zero, to oszacowanie jest trywialne).

Podsumowanie

Praca dotyczy ważnej i aktualnej tematyki. Jest tu kilka nowych wyników, niektóre bardzo ciekawe (jak np. te z rozdziału 3). Większość wyników jest uogólnieniami wcześniej znanych faktów i w znacznej mierze buduje na wcześniej używanych technikach i metodach. Należy jednak przyznać, że nie są to uogólnienia natychmiastowe. Modele rozważane w rozprawie prowadzą do dużego skomplikowania problemu pod względem technicznym. Doktorant wykazał się dobrym zrozumieniem wcześniej używanych metod i twórczym ich zastosowaniem w dużo bardziej skomplikowanym modelu. Praca wymagała sporej biegłości technicznej. Całościowy jej obraz jest pozytywny.

W mojej opinii rozprawa spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim, dlatego wnoszę o dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Anna Taraszkiewicz-Noble