

WYBRANE NIELINIOWE ZAGADNIENIA DIRICHLETA Z OPERATOREM LAPLACE'A ORAZ UŁAMKOWYMI OPERATORAMI LAPLACE'A

DOROTA BORS

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIwersytet Łódzki

ŁÓDŹ, 13 STYCZNIA 2016 R.

Zagadnienia Dirichleta dla równania z ułamkowym spektralnym laplasjanem

Rozważmy zagadnienie brzegowe typu Dirichleta zadane przez równanie ze **spektralnym operatorem Laplace'a** $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (1, 2]$ postaci

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) &= f(x, u(x), w(x)) \text{ dla } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= 0 \text{ dla } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie

- Ω jest obszarem ograniczonym o gładkim (lipschitzowskim) brzegu $\partial\Omega$,
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją,
- $w \in \mathcal{W}$ jest parametrem funkcyjnym
 - $\mathcal{W} = \{w \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) : w(x) \in \mathbb{W} \text{ p.w. na } \Omega\}$ dla $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^m$,
- u jest słabym rozwiązaniem w $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$
 - $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ jest ułamkową przestrzenią Sobolewa.

Przestrzeń $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ i operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$

Niech $\{\rho_k, \lambda_k\}$ będzie **układem ortonormalnym zupełnym** w $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, gdzie $\rho_k \in C^\infty$, $\rho_k|_{\partial\Omega} = 0$ funkcje własne, $\lambda_k > 0$ wartości własne operatora Laplace'a: $-\Delta\rho_k = \lambda_k\rho_k$. W przestrzeni

$$H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R}) = \left\{ u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) : \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \lambda_k^{\alpha/2} < \infty \text{ dla } u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rho_k \right\}$$

- norma $\|u\|_{H_0^{\alpha/2}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \lambda_k^{\alpha/2}$
- iloczyn skalarny $\langle u, v \rangle_{H_0^{\alpha/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \lambda_k^{\alpha/2}$.

Spektralny ułamkowy operator Laplace'a $(-\Delta)^{\alpha/2}$ możemy zdefiniować:

- dla $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rho_k$ takich, że $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \lambda_k^{\alpha/2} < \infty$, z $(-\Delta)^{\alpha/2}u$ w sensie słabym

$$((-\Delta)^{\alpha/2}u) \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k \lambda_k^{\alpha/2} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \lambda_k^{\alpha/4} \varphi_k \lambda_k^{\alpha/4}$$

dla dowolnego $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \rho_k$ takiego, że $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \lambda_k^{\alpha/2} < \infty$

- o wartościach w L^2 dla $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rho_k$ takich, że $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \lambda_k^{\alpha} < \infty$ wzorem

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \lambda_k^{\alpha/2} \rho_k$$

Przykład

Dla $\Omega = (0, \pi)$ oraz $-\Delta u = -u''$ z $u(0) = u(\pi) = 0$ mamy

$$\lambda_k = k^2, \rho_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$$

a zatem

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \lambda_k^{\alpha/2} \rho_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k k^{\alpha} \sin(kx)$$

gdzie

$$u_k = \int_0^{\pi} u(x) \rho_k(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} u(x) \sin(kx) dx.$$

W szczególności

$$(-\Delta)^{\alpha/2} \sin(2x) = 2^{\alpha} \sin(2x).$$

Rozważmy zagadnienie Dirichleta w $(0, \pi)$ z $-\Delta u = u''$ oraz równaniem z ułamkowym, spektralnym operatorem Laplace'a

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = 1.$$

Wówczas rozwijając 1 w szereg Fouriera w układzie $(k^2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k \cdot))$ otrzymujemy

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} k} (1 - (-1)^k) \sin(kx)$$

Następnie korzystając z faktu, że

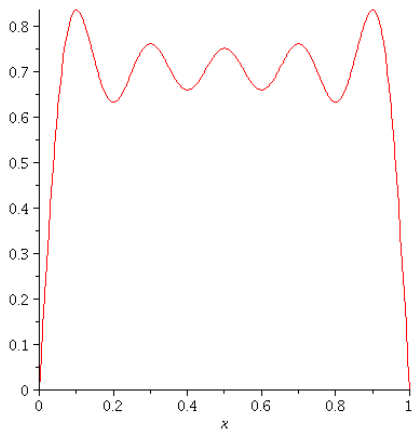
$$(-\Delta)^{\alpha/2} \sin(k \cdot) = k^{\alpha} \sin(k \cdot)$$

otrzymujemy, że rozwiązanie u dane jest wzorem przez **zbieżny jednostajnie**

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} k^{1+\alpha}} (1 - (-1)^k) \sin(kx), x \in (0, \pi)$$

Funkcja 1 po przedłużeniu nieparzystym i 2π -okresowym jest H^{γ} , $\gamma < 1/2$. Z kolei, ponieważ poprawienie regularności rozwiązania następuje o α (rząd operatora), rozwiązanie jest klasy $H^{\gamma+\alpha}$ z $\gamma < 1/2$, a zatem w przestrzeni Höldera $C^{\alpha}[0, \pi]$ (z włożeń Sobolewa). Ponadto zbieżność szeregu jest jednostajna, więc rozwiązanie jest ciągłe.

Rozwiązania przybliżone $(-\Delta)^{\alpha/2} u = \text{const}$, czyli sumy częściowe do n



Rozwiązania przybliżone dla sum do $n = 1..20$. Przybliżenie stałej dla $n = 10$.

Mówimy, że $u \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ jest *slabym rozwiązaniem* równania

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = f(x, u(x), w(x)) \text{ dla } x \in \Omega$$

z zerowym warunkiem brzegowym, jeśli dla dowolnego $h \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$

$$\langle u, h \rangle_{H_0^{\alpha/2}} = \int_{\Omega} f(x, u(x), w(x)) h(x) \, dx.$$

Funkcjonał $\mathcal{K}_w : H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$\mathcal{K}_w(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^{\alpha/2}}^2 - \int_{\Omega} F(x, u(x), w(x)) \, dx$$

gdzie $F_u(x, u(x), w(x)) = f(x, u(x), w(x))$ nazywamy *funkcjonałem działania*.

Punkty krytyczne funkcjonału $\mathcal{K}_w$, tzn. punkty u takie, że $\mathcal{K}'_w(u) = 0$, odpowiadają słabym rozwiązaniom rozważanego zagadnienia Dirichleta.

Rozważmy punkty krytyczne typu minimum funkcjonału $\mathcal{K}_w$, czyli punkty krytyczne u^* takie, że

$$\mathcal{K}_w(u^*) = \min_{p \in H_0^{\alpha/2}} \mathcal{K}_w(p).$$

Założenia

(A1) (regularność) funkcje f, F są mierzalne ze względu na x dla dowolnych $(u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ oraz ciągłe ze względu na (u, w) dla p.w. $x \in \Omega$

(A2) (wzrost) jeśli $p \in (1, \infty)$ istnieje $c > 0$ oraz $s \in (1, 2_\alpha^*)$ takie, że

$$|F(x, u, w)| \leq c(1 + |u|^s + |w|^p)$$

$$|f(x, u, w)| \leq c(1 + |u|^{s-1} + |w|^{p-p/s})$$

dla p.w. $x \in \Omega$, wszystkich $w \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}$;

jeśli $p = \infty$ to dla dowolnego zbioru ograniczonego $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^m$ istnieje $c > 0$ oraz $s \in (1, 2_\alpha^*)$ takie, że

$$|F(x, u, w)| \leq c(1 + |u|^s)$$

$$|f(x, u, w)| \leq c(1 + |u|^{s-1})$$

dla p.w. $x \in \Omega$, wszystkich $w \in \mathbb{W}, u \in \mathbb{R}$;

(A3) (podparcie na $(-F)$ z dołu) istnieją funkcje $\beta \in L^2(\Omega, \mathbb{R}), \gamma \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ oraz stała $b < \frac{1}{2}\lambda_1^{\alpha/2}$ takie, że

$$F(x, u, w) \leq b|u|^2 + \beta(x)u + \gamma(x)$$

dla p.w. $x \in \Omega$, wszystkich $w \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}$, gdzie λ_1 jest pierwszą, dodatnią wartością własną operatora Laplace'a $(-\Delta)$ na przestrzeni $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$

Gdzie $2_\alpha^* = \frac{2n}{n-\alpha}$ jest wykładnikiem krytycznym Sobolewa, tzn. przestrzeń $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ wkłada się w sposób zwarty w $L^s(\Omega, \mathbb{R})$ dla $s \in [1, 2_\alpha^*)$.

Pierwsza wartość własna spektralnego ułamkowego operatora Laplace'a z $\alpha \in (1, 2]$ rozważanego na przestrzeni funkcji z zerowymi warunkami brzegowymi jest postaci

$$\lambda_1^{\alpha/2} = \inf \left\{ \frac{\|u\|_{H_0^{\alpha/2}}^2}{\|u\|_{L^2}^2}; u \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R}), u \neq 0 \right\}$$

Jeśli warunki (A1) (regularność) oraz (A2) (wzrost) są spełnione to funkcjonal $\mathcal{K}_w$ jest dobrze określony oraz różniczkowalny w sensie Frecheta oraz

$$\mathcal{K}'_w(u)h = \langle u, h \rangle_{H_0^{\alpha/2}} - \int_{\Omega} f(x, u(x), w(x)) h(x) dx$$

dla dowolnego $h \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$.

Jeśli warunki (A1) (regularność) oraz (A2) (wzrost) są spełnione to funkcjonal $\mathcal{K}_w$ jest słabo półciągły z dołu.

Jeśli warunki (A1) (regularność), (A2) (wzrost) oraz (A3) (podparcie na (-F) z dołu) są spełnione to funkcjonal $\mathcal{K}_w$ jest koercytywny.

Zbiory punktów krytycznych

Dla dowolnego parameteru

$$w \in \mathcal{W}$$

niech

$$U_w \subset H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$$

oznacza zbiór punktów krytycznych typu minimum funkcjonału $\mathcal{K}_w$, tzn.

$$U_w = \left\{ u \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R}) ; \mathcal{K}_w(u) = \min \mathcal{K}_w(p) ; p \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R}) \right\}.$$

Dla dowolnego $w \in \mathcal{W}$, jeśli (A1),(A2),(A3) są spełnione

- to zbiór U_w jest niepusty.
- i dodatkowo jeżeli funkcjonał $\mathcal{K}_w$ jest ściśle wypukły, to zbiór U_w jest zbiorem jednoelementowym.

Następnie, niech

- $\{w_k\} \subset \mathcal{W}$ będzie ciągiem parametrów
- $\{U_{w_k}\} \subset H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ będzie odpowiadającym mu ciągiem zbiorów punktów krytycznych typu minimum funkcjonału $\mathcal{K}_{w_k}$.

Czy jeśli $w_k \rightarrow w_0$, to czy $U_{w_k} \rightarrow U_{w_0}$ (w jakim sensie)?

Niech $\mathbb{X}$ oznacza refleksywną przestrzeń Banacha (np. $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$)

Definicja górnej granicy zbiorów w sensie Painlevé-Kuratowskiego

Górną granicą zbiorów U_k w sensie Painlevé-Kuratowskiego nazywamy zbiór wszystkich punktów skupienia w sensie τ -topologii $\mathbb{X}$ ciągów $\{u_k\}$ takich, że $u_k \in U_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Górną granicę zbiorów U_k w τ -topologii $\mathbb{X}$ oznaczamy przez $\tau - \limsup U_k$.

Ponadto mówimy, że ciąg zbiorów U_k zbiega do U_0 w τ -topologii $\mathbb{X}$ wtedy, gdy $\tau - \limsup U_k \subset U_0$.

W przypadku, gdy zbiory U_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ są jednoelementowe tzn.

$U_k = \{u_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ zbieżność zbiorów jest równoważna zbieżności ciągu $\{u_k\}$ w τ -topologii $\mathbb{X}$.

Czy jeśli $w_k \rightarrow w_0$, to czy $\limsup U_{w_k} \subset U_{w_0}$, o ile $\limsup U_{w_k} \neq \emptyset$?

Stabilność rozwiązań - zbieżność parametrów w mocnej topologii

Twierdzenie 1. Zakładamy, że

- (1) F spełnia (A1)-(A3) (regularność, wzrost, podparcie na $-F$ z dołu),
- (2) $w_k \rightarrow w_0$ w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $p > 1$.

Wówczas:

- (a) dla dowolnego w_k zbiór U_{w_k} punktów krytycznych typu minimum funkcjonału $\mathcal{K}_{w_k}$ jest niepusty,
- (b) istnieje kula $B_\rho \subset H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ taka, że $U_{w_k} \subset B_\rho$ dla $k \in \mathbb{N}_0$,
- (c) $\limsup U_{w_k} \neq \emptyset$ oraz $\limsup U_{w_k} \subset U_{w_0}$ w $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$.

- Zauważmy, że (c) wraz z (2) oznacza, że multifunkcja

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \ni w \mapsto U_w \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$$

jest półciągła z góry, ze zbieżnością zbiorów w sensie Painlevé-Kuratowskiego.

- Jeśli dla dowolnego w funkcjonał działania $\mathcal{K}_w$ jest ściśle wypukły, to $u_{w_k} \rightarrow u_{w_0}$ w $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ o ile $w_k \rightarrow w_0$ w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.
- Jeśli dla dowolnego w , dodatkowo funkcjonał działania $\mathcal{K}_w$ jest wypukły, to zbiór jego minimów pokrywa się ze zbiorem jego punktów krytycznych, a zatem także zbiorem słabych rozwiązań w $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ zagadnienia Dirichleta dla równania $(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = f(x, u(x), w(x))$ dla $x \in \Omega$.

Przykład. Brak ciągłej zależności.

Rozważmy rodzinę rozwiązań

$$u_w = \frac{1}{2-w} \sin(x_1) \sin(x_2), \quad w < 2$$

zagadnienia Dirichleta dla równania w $\Omega = (0, \pi)^2$

$$-\Delta u = wu + \sin(x_1) \sin(x_2), \quad w < 2$$

z jednorodnym warunkiem brzegowym

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Mnożąc, dla $w = 2$, równanie różniczkowe przez funkcję $\sin(x_1) \sin(x_2)$ oraz całkując stronami, a następnie przez części otrzymujemy sprzeczność

$$0 = \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x_1) \sin^2(x_2) dx_1 dx_2 > 0$$

co dowodzi braku rozwiązań dla granicznej wartości parametru. Z kolei wspomniana rodzina rozwiązań dla $w < 2$ "wybuchu" w normach $L^\infty(\Omega)$ oraz $L^2(\Omega)$ w granicy, tzn.

$$\|u_w\|_\infty \rightarrow \infty, \|u_w\|_2 \rightarrow \infty \text{ jeśli } w \rightarrow 2^-.$$

Powyższe rozumowanie można przeprowadzić także w jednowymiarowym przypadku z rozwiązaniem postaci

$$u_w = \frac{1}{1-w} \sin(x), w < 1$$

a także w trójwymiarowym przypadku dla rodziny rozwiązań

$$u_w = \frac{1}{3-w} \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3), w < 3$$

czy też uogólnionym n wymiarowym przypadku dla $w < n$

$$u_w = \frac{1}{n-w} \prod_{i=1}^n \sin(x_i).$$

Zjawisko braku ciągłej zależności związane jest tu z interakcją prawej strony równania z jądrem operatora samosprężonego, gdy rozwiązalność zagadnienia liniowego wymaga ortogonalności prawej strony do jądra tu reprezentowanego przez funkcje własne dla krytycznej wartości parametru, czyli pierwszej wartości własnej, por. alternatywę Fredholma.

Przykład

Niech $\Omega = (0, \pi)^2$. Pierwsza wartość własna operatora Laplace'a $-\Delta$ na przestrzeni $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ wynosi

$$\lambda_1 = 3$$

natomiast odpowiadająca funkcja własna

$$\rho_1 = \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3).$$

Natomiast $\lambda_1^{\alpha/2} = 3^{\alpha/2}$ jest pierwszą wartością własną oraz $\rho_1 = \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3)$ odpowiadającą funkcją własną ułamkowego operatora Laplace'a $(-\Delta)^{\alpha/2}$ na przestrzeni $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$.

Założenia twierdzenia 1 spełnia następujące równanie

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) &= au(x) - s|x|^2 u^{s-1}(x) w^1(x) + |x| w^2(x) \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

o ile $1 < s < 6/(3 - \alpha)$, $p > 1$ dostatecznie duże, $a < 3^{\alpha/2}$ oraz $0 \leq w^1(x) \leq 1$, $0 \leq w^2(x) \leq 1$ dla $x \in \Omega$.

Stabilność rozwiązań - zbieżność parametrów w słabej topologii

Uzyskanie wyników dotyczących stabilności rozwiązań względem słabej topologii L^p w przestrzeni parametrów jest możliwe, o ile prawa strona równania jest liniowa ze względu na parametr w , tzn. rozważamy wtedy

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) &= f^1(x, u(x)) + \langle f^2(x, u(x)), w(x) \rangle \text{ dla } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= 0 \text{ dla } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $f^1 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^2 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ oraz $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Funkcjonał działania jest wówczas postaci

$$\mathcal{K}_w(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^{\alpha/2}}^2 - \int_{\Omega} F^1(x, u(x)) + \langle F^2(x, u(x)), w(x) \rangle dx$$

gdzie $F_u^1(x, u) = f^1(x, u)$ oraz $F_u^2(x, u) = f^2(x, u)$.

Założenia

(A0) (postać) F jest postaci $F(x, u, w) = F^1(x, u) + \langle F^2(x, u), w \rangle$;

(A1') (regularność) funkcje f^1, f^2, F^1, F^2 są mierzalne ze względu na x dla dowolnych $u \in \mathbb{R}$ oraz ciągłe ze względu na u dla p.w. $x \in \Omega$;

(A2') (wzrost) dla $1 < p < \infty$ istnieją stała $c > 0$ oraz $s \in \left(1 + \frac{1}{p-1}, 2_\alpha^*\right)$ takie, że

$$|f^1(x, u)| \leq c(1 + |u|^{s-1})$$

$$|f^2(x, u)| \leq c(1 + |u|^{s-1-s/p})$$

dla p.w. $x \in \Omega$, wszystkich $u \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2. Jeśli

(1) spełnione są warunki: (A0), (A1'), (A2'), (A3),

(2) $w_k \rightharpoonup w_0$ (słabo) w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Wtedy:

(a) dla dowolnego w_k zbiór U_{w_k} punktów krytycznych typu minimum funkcjonału $\mathcal{K}_{w_k}$ jest niepusty,

(b) istnieje kula $B_\rho \subset H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ taka że $U_{w_k} \subset B_\rho$ dla $k \in \mathbb{N}_0$,

(c) $\emptyset \neq \limsup U_{w_k} \subset U_{w_0}$ w $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ oraz mocna i słaba granica górna zbiorów U_{w_k} w $H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$ pokrywają się.

Niejednorodny warunek brzegowy

Rozważmy układ równań eliptycznych z niejednorodnym warunkiem brzegowym

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x, u(x), w(x)) \text{ dla } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= v(x) \text{ dla } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie

- $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ jest zadanym potencjalnym polem wektorowym,
- istnieje funkcja $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$f(x, u, w) = F_u(x, u, w)$$

co oznacza $f_i(x, u, w) = F_{u_i}(x, u, w)$ dla $i = 1, 2, \dots, N$.

- $w \in \mathcal{W}$ jest parametrem funkcyjnym,
- $v \in \mathcal{V} \subset H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$,
- u słabe rozwiązanie w $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ takie, że $u - Tv \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$
- operator T jest przedłużeniem v takim, że $Tv \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Przestrzeń $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oznacza zbiór ograniczony o brzegu klasy $C^{0,1}$, wówczas przez $H^{1/2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ oznaczamy podprzestrzeń przestrzeni $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ funkcji $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ takich, że

$$[z]_{n,1}^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|z(x) - z(y)|^2}{|x - y|^{n+1}} dx dy < \infty$$

z normą określoną wzorem

$$\|z\|_{H^{1/2}} = \|z\|_{L^2} + [z]_{n,1}.$$

Ponieważ $\Omega \in C^{0,1}$, więc istnieje skończone pokrycie U_i , $i = 1, 2, \dots, k$, brzegu $\partial\Omega$ takie, że $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ oraz $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$, gdzie $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x', x^n), x^n = a_i(x')\}$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ natomiast $a_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza na D_i , $i = 1, 2, \dots, k$ z $D_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Funkcja

$$v \in H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja

$$g(x') = v(x', a_i(x')) \in H^{1/2}(D_i, \mathbb{R}^N)$$

dla $i = 1, 2, \dots, k$. Dokładna definicja [Kufner, John, Fucik].

Ślad funkcji z $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ oraz twierdzenie o przedłużaniu

Niech

$$R : H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$$

będzie liniowym i ciągłym operatorem takim, że

$$Ru = u|_{\partial\Omega}$$

dla $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

- Operator R istnieje i jest jednoznacznie wyznaczony (por. Tw. 6.8.13 [Kufner, John, Fucik]).
- Wartość Ru nazywamy śladem funkcji u na brzegu $\partial\Omega$ i bardzo często piszemy u zamiast Ru .
- Zatem warunek brzegowy $u = v$ na $\partial\Omega$ rozumiemy w sensie śladu.
- Istnieje liniowe i ciągłe odwzorowanie niejednoznacznie wyznaczone

$$T : H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

takie, że $Tv = u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ dla $v \in H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$ oraz ślad u jest równy v , tzn.

$$Ru = RTv = v.$$

(por. Tw. 6.9.2 [Kufner, John, Fucik])

- Ponieważ operator T jest ciągły, więc mamy

$$\|Tv\|_{H^1} \leq c \|v\|_{H^{1/2}}$$

gdzie $c > 0$ zależy od wyboru operatora T oraz opisu $\partial\Omega$.

Słabe sformułowanie

Dla dowolnego $h \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ poszukujemy funkcji $z = u - Tv \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ jako rozwiązania układu równań

$$\langle z + Tv, h \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} f(x, (z + Tv)(x), w(x)) h(x) dx$$

odpowiadającego punktowi krytycznemu funkcjonału

$$\mathcal{K}_{w,v}(z) = \frac{1}{2} \|z\|_{H_0^1}^2 - \int_{\Omega} F(x, (z + Tv)(x), w(x)) dx + \langle z, Tv \rangle_{H_0^1}.$$

Dla dowolnych $w_k \in \mathcal{W}$ oraz $v_k \in \mathcal{V}$ przez U_k będziemy oznaczać zbiór punktów krytycznych typu minimum funkcjonału działania $\mathcal{K}_{w_k, v_k}$ czyli

$$U_k = \left\{ u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) ; \mathcal{K}_{w_k, v_k}(u) = \min \mathcal{K}_{w_k, v_k}(p); p \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$

Twierdzenie 3. Zakładamy, że

- (1) F spełnia (A1)-(A3) (regularyność, wzrost, podparcie na $-F$ z dołu)
- (2) $w_k \rightarrow w_0$ w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$
- (3) $v_k \rightarrow v_0$ w $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Wtedy:

- (a) dla dowolnych w_k oraz v_k zbiór U_k punktów krytycznych typu minimum funkcjonau $\mathcal{K}_{w_k, v_k}$ jest niepusty,
- (b) istnieje kula $B_\rho \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ taka, że $U_k \subset B_\rho$ dla $k \in \mathbb{N}_0$,
- (c) $\limsup U_k \neq \emptyset$ oraz $\limsup U_k \subset U_0$ w $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

UWAGI

- Dla $\alpha \in (1, 2)$ można rozpatrywać układy równań "ułamkowych" z jednorodnym warunkiem brzegowym.
- Dla $\alpha \in (1, 2)$ rozpatrywanie równań "ułamkowych" z niejednorodnym warunkiem brzegowym jest niemożliwe ponieważ zakłada zerowanie funkcji na brzegu.
- Dla $\alpha \in (0, 1)$ rozpatrywanie warunku brzegowego w sensie śladu jako funkcji na $\partial\Omega$ nie ma sensu, ponieważ w tym przypadku $H_0^{\alpha/2} = H^{\alpha/2}$.

Przykład

Rozważmy eliptyczne zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= a |w(x)|^2 |u(x)|^2 u(x) - \frac{1}{4} u(x) + w(x) \\ u(x) &= v(x) \text{ dla } x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

gdzie $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq \frac{1}{2}\}$, $a \geq 0$.

Funkcjonał działania

$$\mathcal{K}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{a}{4} |w(x)|^2 |u(x)|^4 - \frac{1}{8} |u(x)|^2 + w(x) u(x) dx$$

jest ściśle wypukły oraz spełnione są założenia (A1)-(A3) więc dla dowolnego w i v istnieje dokładnie jedno stabilne rozwiązanie.

Zauważmy, że dla $w_0 \equiv 1$, $v_0 \equiv 4$ oraz $a = 0$, wówczas $u_{w_0}(x) \equiv 4$.

Zatem funkcja $u_{w_0}(x) \equiv 4$ jest "dobrą" aproksymacją rozwiązania zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \frac{1}{4} u(x) + w_k(x) \\ u(x) &= v_k(x) \text{ dla } x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

dla w_k dostatecznie bliskiemu $w_0 \equiv 1$ oraz v_k dostatecznie bliskiemu $v_0 \equiv 4$, w odpowiednich przestrzeniach.

Twierdzenie o górskiej przełęczy

Funkcjonał $\mathcal{K} : E \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 . E jest przestrzenią Banacha.

- Punkt $z^* \in E$ jest punktem krytycznym funkcjonału $\mathcal{K}$ jeśli $\mathcal{K}'(z^*) = 0$ ponadto $c = \mathcal{K}(z^*)$ nazywamy wartością krytyczną.
- Ciąg $\{z_k\}$ jest ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału $\mathcal{K}$, jeśli istnieje stała $M > 0$ taka, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{K}(z_k)| \leq M$ oraz $\mathcal{K}'(z_k) \rightarrow 0$ jeśli $k \rightarrow \infty$.
- Funkcjonał $\mathcal{K}$ spełnia warunek Palais-Smale'a jeśli dowolny ciąg Palais-Smale'a zawiera podciąg zbieżny w mocnej topologii E .

Twierdzenie (Ambrosetti-Rabinowitz) Jeśli $\mathcal{K} : E \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonałem klasy C^1 oraz

1^o istnieją $z_0, z_1 \in E$ oraz otoczenie B elementu z_0 takie że $z_1 \in E \setminus \overline{B}$

2^o $\inf_{y \in \partial B} \mathcal{K}(y) > \max\{\mathcal{K}(z_0), \mathcal{K}(z_1)\}$,

3^o $c = \inf_{g \in M} \max_{t \in [0,1]} \mathcal{K}(g(t))$ gdzie

$M = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = z_0, g(1) = z_1\}$,

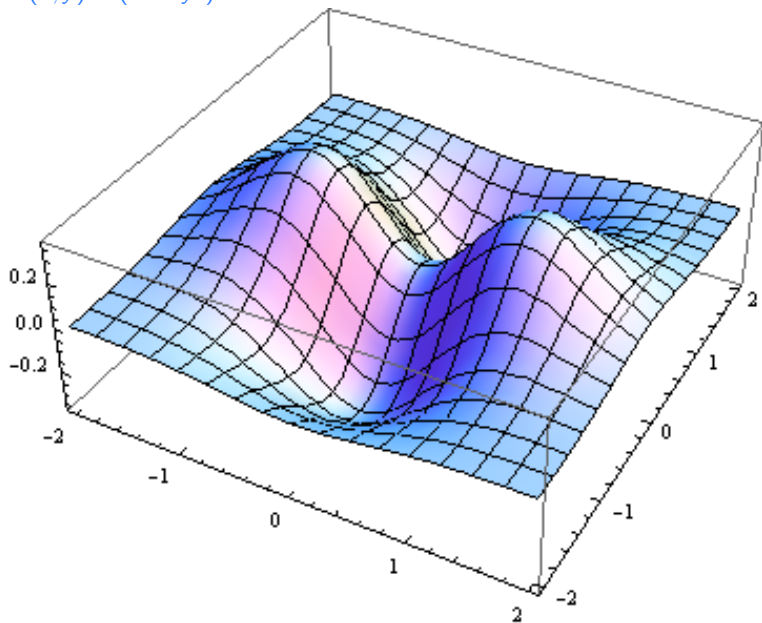
4^o $\mathcal{K}$ spełnia warunek (PS),

to c jest wartością krytyczną oraz $c > \max\{\mathcal{K}(z_0), \mathcal{K}(z_1)\}$.

Struktura przełęczu górskiej w przypadku dwuwymiarowej dziedziny:

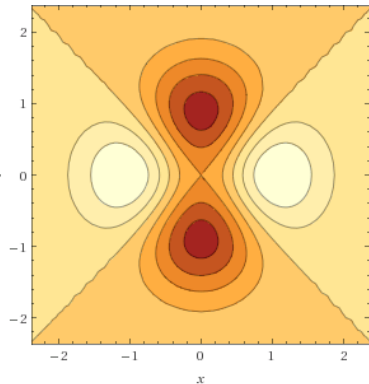
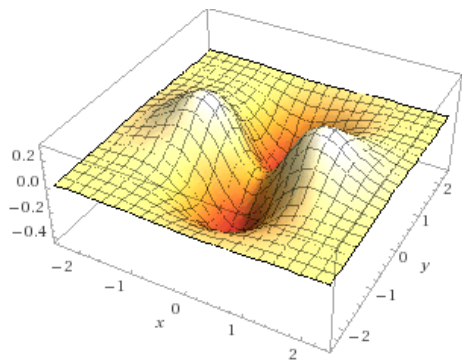
$$K(0,0) = 0 > -1/e = \max\{K(0,1), K(0,-1)\}, K(x,y) \geq K(0,y)$$

$$K(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$$



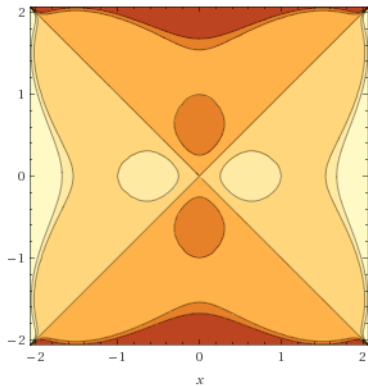
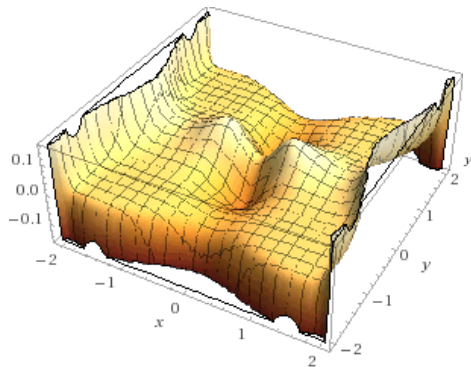
Struktura przełęcz górskiej w przypadku dwuwymiarowej dziedziny:

$$(x^2 - y^2 - 0.2)e^{-x^2 - y^2}$$



Struktura przełączki górskiej w przypadku dwuwymiarowej dziedziny:

$$(x^2 - y^2)e^{-4x^2 - 4y^2 + x^4 + y^4}$$



Nieliniowe zagadnienie Dirichleta dla równania eliptycznego

Równanie eliptyczne z niejednorodnym warunkiem brzegowym

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x, u(x), w(x)) \text{ dla } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= v(x) \text{ dla } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie

- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją,
- $w \in \mathcal{W} \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ jest parametrem funkcyjnym,
- $v \in \mathcal{V} \subset H^{1/2}$ jest warunkiem brzegowym,
- u jest słabym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego takim, że $u - Tv \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Słabe sformułowanie

Dla dowolnego $h \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$, poszukujemy funkcji $z = u - Tv \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ jako rozwiązania równania

$$\langle z + Tv, h \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} f(x, (z + Tv)(x), w(x)) h(x) dx$$

odpowiadającego punktowi krytycznemu funkcjonału

$$\mathcal{K}_{w,v}(z) = \frac{1}{2} \|z\|_{H_0^1}^2 - \int_{\Omega} F(x, (z + Tv)(x), w(x)) dx + \langle z, Tv \rangle_{H_0^1}.$$

$w \in \mathcal{W} = \{w \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) : w(x) \in \mathbb{W} \text{ dla p.w. } x \in \Omega \text{ oraz } \|w\|_{L^\infty} \leq k_2\}$

$v \in \mathcal{V} = \{v \in H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}) : \|v - v_0\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R})} \leq k_1\}$

dla $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^m$ oraz $v_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R})$.

Założenia

- (B1) (regularność) funkcje f, F są mierzalne ze względu na x dla dowolnych $(u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ oraz ciągłe ze względu na (u, w) dla p.w. $x \in \Omega$
- (B2) (wzrost) dla dowolnego zbioru ograniczonego $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^m$ istnieją $c > 0$ oraz $s \in (2, 2_2^*)$ takie, że

$$|F(x, u, w)| \leq c(1 + |u|^s)$$
$$|f(x, u, w)| \leq c(1 + |u|^{s-1})$$

dla p.w. $x \in \Omega$, wszystkich $w \in \mathbb{W}$, $u \in \mathbb{R}$.

- (B3) (superliniowość) istnieją stałe $p > 2$, $a > 0$ oraz $R > 0$ takie że

$$a < pF(x, u, w) \leq \langle f(x, u, w), u \rangle$$

dla p.w. $x \in \Omega$, wszystkich $w \in \mathbb{W}$ oraz $|u| \geq R$

- (B4) (geometria) istnieją $\xi > 0$ oraz $0 < b < 1$ takie, że

$$\left| F(x, u, w) + \frac{1}{2} |u|^2 \right| \leq \frac{b}{2} |u - Tv_0(x)|^2$$

dla $|u| \leq \xi$, wszystkich $w \in \mathbb{W}$, p.w. $x \in \Omega$ gdzie T jest prawą odwrotnością operatora śladu taką, że $H^1(\Omega, \mathbb{R}) = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \oplus \text{Im } T$,

- (B5) (Lipschitz po w) dla dowolnego $w_0 \in \mathbb{W}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$|F(x, u, w_1) - F(x, u, w_2)| \leq c(1 + |u|^2) |w_1 - w_2|$$
$$|f(x, u, w_1) - f(x, u, w_2)| \leq c(1 + |u|) |w_1 - w_2|$$

dla p.w. $x \in \Omega$, wszystkich $u \in \mathbb{R}$ oraz $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ takich, że $|w_1 - w_0| < \varepsilon$ i $|w_2 - w_0| < \varepsilon$.

Niech

$\{w_k\} \subset \mathcal{W}$ oznacza ciąg parametrów funkcyjnych

$\{v_k\} \subset \mathcal{V}$ oznacza ciąg wartości brzegowych

$\{Z_k\} \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ oznacza ciąg zbiorów punktów krytycznych typu górskiej przełęczy funkcjonału $\mathcal{K}_{w_k, v_k}$ postaci

$$Z_k = \{z \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}); \mathcal{K}_{w_k, v_k}(z) = c_k \text{ oraz } \mathcal{K}'_{w_k, v_k}(z) = 0\}$$

gdzie

$$c_k = \inf_{g \in M} \max_{t \in [0, 1]} \mathcal{K}_{w_k, v_k}(g(t))$$

$$M = \{g \in C([0, 1], H_0^1(\Omega, \mathbb{R})) : g(0) = z_0, g(1) = z_1\}, \quad z_0, z_1 \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$$

Twierdzenie 4. Zakładamy, że

1^o warunki (B1)-(B5) są spełnione,

2^o $v_k \rightarrow v_0$ w $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R})$ oraz $w_k \rightarrow w_0$ w $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$,

Wtedy:

(a) dla odpowiednio dużych k zbiór Z_k jest niepusty,

(b) istnieje kula $B_\rho \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ taka, że $Z_k \subset B_\rho$ dla $k \in \mathbb{N}_0$,

(c) $\limsup Z_k \neq \emptyset$ oraz $\limsup Z_k \subset Z_0$ w $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Lematy pomocnicze

Lemat 1. Jeśli funkcja F spełnia założenia (B1)-(B2), to istnieje kula B_ρ w $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ taka, że $Z_k \subset B_\rho$ dla dowolnych $w_k \in \mathcal{W}$, $v_k \in \mathcal{V}$.

Lemat 2. Jeśli funkcja F spełnia założenia (B1)-(B4), to dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$ funkcjonal $\mathcal{K}_{w_k, v_k}$ spełnia warunek (PS).

Lemat 3. Zakładamy, że

1^o warunki (B1)-(B4) są spełnione

2^o $v_k \rightarrow v_0$ w $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R})$ dla $\{v_k\} \in \mathcal{V}$ oraz ciąg $\{w_k\} \subset \mathcal{W}$ jest ograniczony.

Wówczas dla $z_0 = 0$ istnieją kula $B_\eta \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ i element $z_1 \notin B_\eta$ takie, że $\inf_{\partial B_\eta} \mathcal{K}_{w_k, v_k} > 0$ oraz $\mathcal{K}_{w_k, v_k}(z_1) < 0$ dla dostatecznie dużych k .

Lemat 4. Zakładamy, że

1^o warunki (B1)-(B2), (B5) są spełnione

2^o $v_k \rightarrow v_0$ w $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R})$ oraz $w_k \rightarrow w_0$ w $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Wówczas $\mathcal{K}_{w_k, v_k} \rightrightarrows \mathcal{K}_{w_0, v_0}$ oraz $\mathcal{K}'_{w_k, v_k} \rightrightarrows \mathcal{K}'_{w_0, v_0}$ na dowolnych kulach z $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Zagadnienie Dirichleta dla równania z całkowym ułamkowym laplasjanem

Równanie z całkowym ułamkowym operatorem Laplace'a $(-\Delta)^{\alpha/2}$ z $\alpha \in (1, 2)$ oraz niejednorodnym warunkiem zewnętrznym

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) &= f(x, u(x), w(x)) \text{ dla } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= v(x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\end{aligned}$$

gdzie

- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją,
- $w \in \mathcal{W} \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ jest parametrem funkcyjnym,
- $v \in \mathcal{V} \subset H^{\alpha/2}$ jest warunkiem brzegowym lub zewnętrznym,
- u jest słabym rozwiązaniem zagadnienia zewnętrznego takim, że $u - v \in H_0^{\alpha/2}(\Omega, \mathbb{R})$.

Dla $\alpha \in (1, 2)$ oraz funkcji dostatecznie gładkich np. C^2 i o kontrolowanym wzroście w nieskończoności np. wolniejszym niż $|x|^\alpha$ ułamkowy całkowity operator Laplace'a definiujemy wzorem

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = c(n, \alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+\alpha}} dy$$

gdzie $c(n, \alpha) = \alpha 2^{\alpha-2} \frac{\Gamma((n+\alpha)/2)}{\pi^{n/2} \Gamma(1-\alpha/2)}$.

Zagadnienia Dirichleta dla równania z całkowym ułamkowym Laplasjanem

Funkcja $u(x) = (1 - x^2)_+^{\alpha/2} \in C^{\alpha/2}$ rozwiązaniem $(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = 1$

Przestrzenie funkcyjne

Ze względu na nielokalny charakter całkowego ułamkowego laplasjanu wprowadzimy następujące przestrzenie dostosowane do słabego sformułowania

$$X^{\alpha/2} = \left\{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u|_{\Omega} \in L^2(\Omega) \text{ oraz } \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{n+\alpha}{2}}} \in L^2(Q) \right\}$$

gdzie $Q = \mathbb{R}^{2n} \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega))$, z normą określoną wzorem

$$\|u\|_{X^{\alpha/2}} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + [u]_{n,\alpha} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+\alpha}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zdefiniujmy podprzestrzeń liniową przestrzeni $X^{\alpha/2}$

$$X_0^{\alpha/2} = \{ u \in X^{\alpha/2} : u = 0 \text{ p.w. na } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \}$$

z normą

$$\|u\|_{X_0^{\alpha/2}} = [u]_{n,\alpha}$$

Przestrzenie $X^{\alpha/2}$, $X_0^{\alpha/2}$ są niepuste ponieważ $C_0^2(\Omega) \subseteq X_0^{\alpha/2}$.

Przestrzeń $X_0^{\alpha/2}$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u_1, u_2)_{X_0^{\alpha/2}} = \left(\int_Q \frac{(u_1(x) - u_1(y))(u_2(x) - u_2(y))}{|x - y|^{n+\alpha}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zachodzą następujące relacje:

- $X^{\alpha/2} \subset H^{\alpha/2}(\Omega)$
- $H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^n) \subset X^{\alpha/2}$
- $X_0^{\alpha/2} \subset H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^n) \cap H_0^{\alpha/2}(\Omega)$

W przypadku niejednorodnych warunków zewnętrznych zadanych przez funkcję $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ potrzebujemy przestrzeni Hilberta zanurzającej się w $X^{\alpha/2}$ postaci

$$Y^{\alpha/2} = X^{\alpha/2} \cap L^2(\mathbb{R}^n)$$

z normą

$$\|u\|_{Y^{\alpha/2}} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + [u]_{n,\alpha}$$

$Y^{\alpha/2}$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u_1, u_2)_{Y^{\alpha/2}} = (u_1, u_2)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (u_1, u_2)_{X_0^{\alpha/2}}.$$

Z definicji wprowadzonych przestrzeni mamy następujące zanurzenia

$$H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^n) \subset Y^{\alpha/2} \subset X^{\alpha/2}.$$

Dla ograniczonego obszaru w $\mathbb{R}^n$ z lipschitzowskim brzegiem, przestrzeń $X_0^{\alpha/2}$ zanurza się w sposób zwarty w $L^s(\Omega)$ dla $s \in [1, 2_\alpha^*)$ oraz

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{X_0^{\alpha/2}}$$

dla dowolnego $u \in X_0^{\alpha/2}$.

Poszukujemy słabych rozwiązań w $X^{\alpha/2}$ zagadnienia zewnętrznego

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = f(x, u(x), w(x)) & \text{na } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) = v(x) & \text{w } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

gdzie $u - v \in X_0^{\alpha/2}$, $v \in \mathcal{V} \cap \left(X_0^{\alpha/2}\right)^\perp$, $w \in \mathcal{W}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Ustalamy $v_0 \in Y^{\alpha/2}$ i definiujemy zbiór

$$\mathcal{V} = \{v \in Y^{\alpha/2} : \|v - v_0\|_{Y^{\alpha/2}} \leq h_1\}$$

dla $h_1 > 0$ oraz zbiór

$$\mathcal{W} = \{w \in L^\infty : w(x) \in W \subset \mathbb{R}^m \text{ dla p.w. } x \in \Omega \text{ oraz } \|w\|_{L^\infty} \leq h_2\}$$

dla $h_2 > 0$ oraz ustalonego W podzbioru $\mathbb{R}^m$ z $m \geq 1$.

Mówimy, że $z = u - v \in X^{\alpha/2}$ jest słabym rozwiązaniem rozważanego równania jeśli dla dowolnego $h \in X_0^{\alpha/2}$

$$c(n, \alpha) \langle z + v, h \rangle_{X_0^{\alpha/2}} = \int_{\Omega} f(x, (z + v)(x), w(x)) h(x) \, dx.$$

Funkcjonał działania jest postaci

$$\mathcal{K}_{w,v}(z) = \frac{c(n, \alpha)}{2} \|z\|_{X_0^{\alpha/2}}^2 - \int_{\Omega} F(x, (z+v)(x), w(x)) dx + c(n, \alpha) \langle z, v \rangle_{X_0^{\alpha/2}}$$

co oznacza

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{w,v}(z) = & \frac{c(n, \alpha)}{2} \int_Q \frac{|z(x) - z(y)|^2}{|x - y|^{n+\alpha}} dx dy - \int_{\Omega} F(x, (z+v)(x), w(x)) dx \\ & + c(n, \alpha) \int_Q \frac{(v(x) - v(y))(z(x) - z(y))}{|x - y|^{n+\alpha}} dx dy \end{aligned}$$

Dla zbiorów punktów krytycznych typu górskiej przełęczy zachodzi następujące

Twierdzenie 5. Zakładamy, że

1^o odpowiedniki warunków (B1)-(B5) są spełnione,

2^o $v_k \rightarrow v_0$ w $Y^{\alpha/2}$ oraz $w_k \rightarrow w_0$ w $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\{w_k\} \subset \mathcal{W}$, $\{v_k\} \in \mathcal{V}$.

Wtedy:

(a) dla odpowiednio dużych k zbiór Z_k jest niepusty,

(b) istnieje kula $B_\rho \subset X_0^{\alpha/2}$ taka, że $Z_k \subset B_\rho$ dla $k \in \mathbb{N}_0$,

(c) $\limsup Z_k \neq \emptyset$ oraz $\limsup Z_k \subset Z_0$ w $X_0^{\alpha/2}$.

Przykład.

Założenia twierdzenia 5 są spełnione dla zewnętrznego zagadnienia postaci

$$\begin{cases} (-\Delta)^{3/4} u(x) = \frac{7}{2} u^{\frac{5}{2}}(x) - \gamma w(x) u(x) - \frac{5}{2} w(x) u^{\frac{3}{2}}(x) \sin^2 |x| & \text{na } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u(x) = v(x) & \text{na } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \end{cases}$$

gdzie $\Omega = (0, 1)^3$, $w \in \mathcal{W}$ taki, że

$$\mathcal{W} = \left\{ w \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}) : w(x) \in W \subset \left(\frac{\hat{c} - b}{\gamma}, \frac{\hat{c} + b}{\gamma} \right) \text{ p.w.} \right\}$$

gdzie $\gamma > 0$, $\hat{c} = c(3, \frac{3}{2})$ oraz $0 < b < \hat{c}$ natomiast $v \in \mathcal{V}$ postaci

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in Y^{3/4} : v(x) \in [0, 1], \quad \|v\| \leq 1 \right\}.$$

Twierdzenie o globalnym dyfeomorfizmie

Twierdzenie: Idczak, Skowron, Walczak (2012)

Niech U będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha, H będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Jeśli

$$V : U \rightarrow H$$

jest operatorem klasy C^1 takim, że

(a1) dla dowolnego $u \in U$, równanie

$$V'(u)h = g$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego $g \in H$,

(a2) dla dowolnego $\psi \in H$, funkcjonal

$$F_\psi(u) = \frac{1}{2} \|V(u) - \psi\|_H^2$$

spełnia warunek Palais-Smale'a,
to V jest dyfeomorfizmem.

Operator $V : U \rightarrow H$ jest dyfeomorfizmem, jeśli jest na, jest różniczkowalny na U oraz operator odwrotny $V^{-1} : H \rightarrow U$ jest różniczkowalny na H .



D. Idczak, A. Skowron and S. Walczak; On the diffeomorphisms between Banach and Hilbert spaces". Advanced Nonlinear Studies 12(1) (2012)

Równania całkowe

Zauważmy, że dla rozważanego zagadnienia z całkowym ułamkowym laplasjanem

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} u = f(x, u, w) & \text{na } \Omega \\ u = 0 & \text{w } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

ponieważ $0 \notin \sigma((-\Delta)^{\alpha/2})$ w odpowiednich przestrzeniach i przy odpowiednich założeniach mamy

$$u = ((-\Delta)^{\alpha/2})^{-1} f(x, u, w)$$

Operator odwrotny do ułamkowego operatora Laplace'a złożony z nieliniowością f jest postaci Hammersteina

$$((-\Delta)^{\alpha/2})^{-1} f(x, u, w) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y, u(y), w) dy$$

gdzie G jest funkcją Greena.

Rozważenie $\Omega = [-1, 1]$, $\lambda \neq 0$ oraz nieliniowości

$$f(x, u, w) = \frac{1}{\lambda} (-h(x, u) + (-\Delta)^{\alpha/2} w(x))$$

prowadzi do równania całkowego z parametrem w postaci

$$\lambda u(x) + \int_{-1}^1 G(x, y) h(y, u(y)) dy = w(x)$$

Zagadnienie Dirichleta z jednowymiarowym całkowym ułamkowym laplasjanem, można sprowadzić do równania całkowego postaci

$$\begin{aligned}\lambda u(x) + ((-\Delta)^{\alpha/2})^{-1} h(x, u(x)) &= w(x) \quad \text{w } (-1, 1) \\ u(x) &= 0 \quad \text{w } (-\infty, -1] \cup [1, \infty)\end{aligned}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$

$$((-\Delta)^{\alpha/2})^{-1} g(x) = \int_{-1}^1 G(x, y) g(y) dy,$$

G jest funkcją Greena, wyznaczoną dla ułamkowego całkowego laplasjanu

$$G(x, y) = \frac{\Gamma(1/2)}{2^\alpha \pi^{1/2} \Gamma^2(\alpha/2)} |x - y|^{\alpha-1} \int_0^{w(x,y)} r^{\alpha/2-1} (r+1)^{-1/2} dr,$$

gdzie

$$w(x, y) = \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{|x-y|^2}.$$

Rozważane równanie jest szczególnym przypadkiem równania Urysohna z nieliniowym operatorem całkowym postaci

$$V(u)(x) = \lambda u(x) + \int_{-1}^1 v(x, y, u(y)) dy, \quad x \in [-1, 1]$$

$$u \in H_0^1([-1, 1], \mathbb{R}^n).$$

Założenia: regularność oraz lokalna ograniczoność

- (A1) (a) $v(\cdot, y, \cdot)$ jest ciągła na $G := [-1, 1] \times \mathbb{R}^n$ dla p.w. $y \in [-1, 1]$,
(b) istnieją $v_x(\cdot, y, \cdot)$, $v_u(\cdot, y, \cdot)$, $v_{xu}(\cdot, y, \cdot)$ ciągłe na G dla p.w. $y \in [-1, 1]$;
- (A2) (a) $v(x, \cdot, u)$, $v_x(x, \cdot, u)$, $v_u(x, \cdot, u)$, $v_{xu}(x, \cdot, u)$ są mierzalne dla $(x, u) \in G$,
(b) $v(x, \cdot, u)$, $v_x(x, \cdot, u)$, $v_u(x, \cdot, u)$, $v_{xu}(x, \cdot, u)$ są lokalnie ograniczone ze względu na x , tzn. dla dowolnego $\rho > 0$ istnieje $l_\rho > 0$ takie, że $(x, y) \in P$ i $x \in B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq \rho\}$ mamy $|v(x, y, u)| \leq l_\rho$, $|v_x(x, y, u)| \leq l_\rho$, $|v_u(x, y, u)| \leq l_\rho$, $|v_{xu}(x, y, u)| \leq l_\rho$;
- (A3) $v(-1, y, u) = v(1, y, u) = 0$ oraz $v_u(-1, y, u) = v_u(1, y, u) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ i p.w. $y \in [-1, 1]$;
- (A4) $|v_{ux}(x, y, u)| < |\lambda|/2$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ i p.w. $y \in [-1, 1]$;

Jeśli v spełnia (A1), (A2) oraz (A3), to $V : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ jest

- * dobrze określony,
- * różniczkowalny w sposób ciągły w sensie Fréchet'a oraz

$$V'(u_0)h(x) = \lambda h(x) + \int_{-1}^1 v_u(x, y, u_0(y)) h(y) dy, \quad x \in [-1, 1].$$

Przykład funkcji spełniającej (A1)-(A4): $v(x, y, u) = A(x, y) \ln(1 + B(x, y) u^2)$,
gdzie $A, B \in C^1(P, \mathbb{R})$ takie że $A(-1, y) = A(1, y) = 0$ dla $y \in [-1, 1]$ and
 $B(x, y) > 0$ na $[-1, 1]^2$.

Równanie zlinearyzowane

Lemat o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań

Jeśli v spełnia (A1), (A2), (A3) oraz (A4), to dla dowolnych $u_0, g \in AC_0^2$ równanie

$$\lambda h(x) + \int_{-1}^1 v_u(x, y, u_0(y)) h(y) dy = g(x)$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie w H_0^1 .

Dla $v(x, y, u) = A(x, y) \ln(1 + B(x, y) u^2)$,
równanie liniowe dla ustalonego u_0

$$\lambda h(x) + \int_{-1}^1 A(x, y) \frac{2B(x, y) u_0(y)}{1 + B(x, y) u_0^2(y)} h(y) dy = g(x)$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie h dla dowolnego g .

Warunek Palais-Smale'a

Dla dowolnej funkcji $\psi \in H_0^1$, rozważmy funkcjonał $F_\psi : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ postaci

$$F_\psi(u) = \frac{1}{2} \|V(u) - \psi\|_{H_0^1}^2$$

$$F_\psi(u) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left| \lambda u'(x) + \int_{-1}^1 v_x(x, y, u(y)) dy - \psi'(x) \right|^2 dx.$$

Lemat o spełnieniu warunku (PS) Załóżmy że (A1)-(A4) są spełnione oraz (A5) istnieją funkcje $c, d \in L^2(P; \mathbb{R}^+)$,

$$|v_x(x, y, u)| \leq c(x, y) |u| + d(x, y)$$

$$\text{dla } (x, y) \in P \text{ oraz } \|c\|_{L^2(P; \mathbb{R}^+)} < \frac{\sqrt{2}|\lambda|}{4}.$$

Wtedy dla dowolnego $\psi \in H_0^1$ funkcjonał F_ψ spełnia warunek Palais-Smale'a.

$$\begin{aligned} F_\psi(u) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left| \lambda u'(x) + \int_{-1}^1 \left(A_x(x, y) \ln(1 + B(x, y) u^2(y)) \right. \right. \\ & \left. \left. + A(x, y) \frac{B_x(x, y) u^2(y)}{1 + B(x, y) u^2(y)} \right) dy - \psi'(x) \right|^2 dx \end{aligned}$$

Twierdzenie o globalnym dyfeomorfizmie

Jeśli v spełnia (A1)-(A5), to nieliniowy operator całkowy $V : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ jest dyfeomorfizmem.

WNIOSEK O GLOBALNEJ ROZWIĄZYWALNOŚCI

Jeśli v spełnia (A1)-(A5), to dla dowolnego $w \in H_0^1$ nieliniowe całkowe równanie

$$\lambda u(x) + \int_{-1}^1 v(x, y, u(y)) dy = w(x)$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie $u_w \in H_0^1$ oraz operator

$$H_0^1 \ni w \rightarrow u_w \in H_0^1$$

jest różniczkowalny w sensie Frécheta.

W przypadku nieliniowej zależności od parametru w można skorzystać z Twierdzenia o globalnej funkcji uwikłanej z pracy



D. Idczak, A global implicit function theorem and its applications to functional equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 19 (2014)

Motywacje zagadnień z ułamkowym operatorem Laplace'a

- generatory półgrup **stabilnych procesów Lévy'ego**
 - METZLER, KLAFTER, PHYS. REP. 2000
'The random walk's guide to anomalous diffusion: a frac. dynamics approach'
 - APPLEBAUM, NOTICES AMS 2004
'Lévy processes - from probability to quantum groups',
 - BOGDAN, BYCZKOWSKI, KULCZYCKI, RYZNAR, SONG, VONDRACEK, 2009
'Potential Analysis of Stable Processes and its Extensions'
- kwazi-geostroficzne równanie Naviera-Stokesa
 - CAFFARELLI, VASSEUR, ANNALS OF MATH. 2010
'Drift diffusion eqs with fractional diffusion and quasi-geostrophic equation'
 - KISELEV, NAZAROV, VOLBERG, INVENTIONES MATH. 2007
'Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic eqs'
 - CORDOBA, ANNALS OF MATH. 1998
'Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic eqn'
- zagadnienie przeszkody Signoriniego w teorii sprężystości
 - PETROSYAN, GAROFALO, INVENTIONES MATH. 2009
'Some new monotonicity formulas and the singular set in the lower dimensional obstacle problem'
 - CAFFARELLI, SALSA, SILVESTRE, INVENTIONES MATH. 2008
'Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian'
 - CAFFARELLI, SILVESTRE, COMMUNICATIONS PDE's 2007
'An extension problem related to the fractional Laplacian'

- ośrodki porowate i przemiany fazowe
 - CAFFARELLI, VÁZQUEZ, ARCH. RAT. MECH. ANAL. 2011
'Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure'
 - GIACOMIN, LEBOWITZ, J. STAT. PHYS. 1997
'Phase segregation dynamics in particle systems with long range interactions'
 - SERFATY, VÁZQUEZ, CALC. VAR. PDES 2014
'A mean field equation as limit of nonl. diffusions with fract. Laplacian'
- dyslokacje w kryształach
 - TOLAND, J. FUNCT. ANAL. 1997
'The Peierl-Nabarro and Benjamin-Otto equations'
 - DIPIERRO, FIGALLI, PALATUCCI, COMM. PDES 2014
'Strongly nonlocal dislocation dynamics in crystals'
 - DIPIERRO, PALATUCCI, VALDINOCI, COMM. MATH. PHYS. 2015
Dislocation dynamics in crystals. A macroscopic th. in fract. Laplace setting.
- fale głębokie wewnętrzne i grawitacyjne
 - GERMAIN, MASMOUDI, SHATAH, ANNALS OF MATH. 2012
Global solutions for the gravity surface water waves equation in dimension 3
- energia relatywistyczna
 - LIEB, BULLETIN AMS 1990
'The stability of matter: from atoms to stars'
- przetwarzanie obrazów
 - GILBOA, OSHER, MULTISCALE MODEL. SIMUL. 2008
Nonlocal operators with applications to image processing



D. Bors, *Stability of nonlinear Urysohn integral equations via global diffeomorphisms and implicit functions theorems*, JOURNAL OF INTEGRAL EQUATIONS AND APPLICATIONS (2015);



D. Bors, A. Skowron, S. Walczak, *Systems described by Volterra type integral operators*, DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS B **19** (2014), 2401–2416;



D. Bors, *Stability of nonlinear Dirichlet BVPs governed by fractional Laplacian*, SCIENTIFIC WORLD JOURNAL **920537** (2014), 1–10;



D. Bors, *Global solvability of Hammerstein equations with applications to BVP involving fractional Laplacian*, ABSTRACT AND APPLIED ANALYSIS **240863** (2013), 1–10;



D. Bors, S. Walczak, *Optimal control of elliptic systems with distributed and boundary controls*, NONLINEAR ANALYSIS: THEORY, METHODS AND APPLICATIONS **63** (2005), 1367–1376;



D. Bors, *Superlinear elliptic systems with distributed and boundary controls*, CONTROL AND CYBERNETICS **34** (2005), 987–1004;



D. Bors, *Application of Mountain Pass Theorem to superlinear equations with fractional Laplacian controlled by distributed parameters and boundary data*, ARXIV:**1408.0618**[math:AP] (2015), 18 stron,



D. Bors, *Optimal control of systems governed by Dirichlet fractional Laplacian in the minimax framework*, ARXIV:**1509.01283**[math:AP] (2015), 20 stron



R. Bañuelos and T. Kulczycki, *The Cauchy process and the Steklov problem*, J. Funct. Anal., **211** (2004), 355–423.



A. Bermudez and C. Saguez, *Optimal control of a Signorini problem*, SIAM J. Control Optim., **25** (1987), 576–582.



M. Bonforte and J. L. Vázquez, *A priori estimates for fractional nonlinear degenerate diffusion equations on bounded domains*, The Royal Swedish Academy of Sciences, Mittag-Leffler Institute, **21** (2013/14).



X. Cabré and Y. Sire, *Nonlinear equations for fractional Laplacians I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates*, Annales de l'Institut Henri Poincaré C, **31** (2014), 23–53.



X. Cabré and Y. Sire, *Nonlinear equations for fractional Laplacians II: Existence, uniqueness, and qualitative properties of solutions*, Trans. Amer. Math. Soc.



L. A. Caffarelli, *Further regularity for the Signorini problem*, Comm. Partial Differential Equations, **4** (1979), 1067–1075.



X. Ros-Oton and J. Serra, *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl., **101** (2014), 275–302.



X. Ros-Oton and J. Serra, *Fractional Laplacian: Pohozaev identity and nonexistence results*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **350** (2012), 505–508.



L. A. Caffarelli and A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*, Ann. of Math., **171** (2010), 1903–1930.



Z.-Q. Chen and R. Song, *Two-sided eigenvalue estimates for subordinate Brownian motion in bounded domains*, J. Funct. Anal., **226** (2005), 90–113.



R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, New York, 1962.



E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques, **136** (2012), 521–573.



P. T. Gressman, *Fractional Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities for measure spaces*, J. Funct. Anal., **265** (2013), 867–889.



R. Servadei and E. Valdinoci, *On the spectrum of two different fractional operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A., **144** (2014), 831–855.



E. Valdinoci, *From the long jump random walk to the fractional Laplacian*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., **49** (2009), 33–44.



J. J. Vázquez, *Nonlinear diffusion with fractional laplacian operators*, Nonlinear Partial Differential Equations, Abel Symposia **7** (2012), 271–298.



J. L. Vázquez, *Recent progress in the theory of nonlinear diffusion with fractional Laplacian operators*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **7** (2014), 857–885.

LOKALNE ISTNIENIE, WYBUCHY ROZWIĄZAŃ W SKOŃCZONYM CZASIE

$$x'(t) = x(t)^2$$

$$x(t) = -1/(t + c)$$

$$x(0) = 1, x(t) = 1/(1 - t) \rightarrow \infty, t \rightarrow 1^-$$

$$u_t = \Delta u + u^2$$

$$-\Delta \rho_1 = \lambda_1 \rho_1$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \rho_1 = \int_{\Omega} \Delta u \rho_1 + \int_{\Omega} u^2 \rho_1 \geq \left(\int_{\Omega} u \rho_1 \right)^2 \left(|\rho_1|_1^{-1} - \lambda_1 / \int_{\Omega} u \rho_1 \right)$$

$$\int_{\Omega} u \rho_1 \rightarrow \infty, t \rightarrow T$$

$R_t \geq \Delta R + R^2$, gdzie $R = \text{tr} R_{ij}$ skalarna krzywizna, zaś R_{ij} Ricci tensor. Jeśli rozmaitość $M = \mathbb{R}^2$ i metryka $g_0 = \rho^2(dx^2 + dy^2)$ to $\text{Ric}(g_0) = \frac{2}{1+x^2+y^2} g_0$

UŁAMKOWY SPEKTRALNY LAPLASJAN $(-\Delta)^{\alpha/2}$ w $H_0^{\alpha/2}$

W wersji słabej o wartościach w przestrzeni dualnej do $H_0^{\alpha/2}$

$$(-\Delta)^{\alpha/2} : H_0^{\alpha/2} \rightarrow (H_0^{\alpha/2})^* = H^{-\alpha}$$

W wersji mocnej z wartościami w L^2

$$(-\Delta)^{\alpha/2} : H^\alpha \cap H_0^{\alpha/2} \rightarrow L^2$$

W ogólności, gdy zamiast do L^2 prawa strona równania $f \in L^{s/(s-1)}$ z $s < 2_\alpha^*$

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = f$$

to rozwiązania są w $W^{\alpha, s/(s-1)}$ (jeśli $s \leq 2$, to $s/(s-1) \geq 2$), a zatem

$$(-\Delta)^{\alpha/2} : W^{\alpha, s/(s-1)} \cap H_0^{\alpha/2} \rightarrow L^{s/(s-1)}$$

ROZKŁAD SPEKTRALNY

Twierdzenie (o rozkładzie spektralnym przestrzeni Hilberta)

Niech przestrzeń Hilberta H będzie óśrodkowa oraz operator $T : H \rightarrow H$ zwarty oraz samosprzężony. Wówczas istnieje baza Hilberta z wektorów własnych T .

Przykład: $(-\Delta_D)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ z symetryczną G

$$(-\Delta_D)^{-1}f = \int_{\Omega} G(\cdot, y)f(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k \rho_k, f_k = (f, \rho_k), \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 < \infty$$

Wartości własne $\mu_k > 0$ i funkcje własne ρ_k : $(-\Delta_D)^{-1}\rho_k = \mu_k \rho_k$.

Zatem $\lambda_k = 1/\mu_k, k \geq 1$ to wartości własne operatora Laplace'a z warunkami Dirichleta: $\lambda_k \rho_k = -\Delta_D \rho_k$, ponieważ $\rho_k \in C^\infty$. Ponadto $\lambda_k \sim k^2$.

Jeśli $\Omega = (0, \pi)$, to $\mu_k = k^{-2}, k \geq 1$ oraz $\rho_k(x) = \sqrt{2/\pi} \sin(kx)$.

Przykład spektralny: $((-\Delta_S)^{\alpha/2})^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^{\alpha/2}(\Omega) \cap H^\alpha(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Wartości własne: $\mu_k^{\alpha/2}$ i funkcje własne ρ_k jak powyżej.

Przykład całkowy: $((-\Delta_C)^{\alpha/2})^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow X_0^{\alpha/2} \cap X^\alpha \subset L^2(\Omega)$.

Wartości własne dla $(-\Delta_C)^{\alpha/2}$ należą do $(\lambda_k/2, \lambda_k)$, gdzie λ_k odp. $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$.

$$u_t = -(-\Delta)^{\alpha/2} u$$

można uzyskać w granicy rozważając spacer losowy po kracie $\mathbb{Z}^n$ z prawdopodobieństwem

$$u(x, t + s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Pi(k) u(x + hk, t)$$

z gęstością rozkładu prawdopodobieństwa

$$\Pi(y) = C \frac{1}{|y|^{n+\alpha}}$$

gdzie prawdopodobieństwo $u(x, t)$ odnosi się do tego, że cząstka znajdzie się w chwili $t \in \tau\mathbb{Z}$ w pozycji $x \in h\mathbb{Z}^n$ oraz z odpowiednim skalowaniem kraty i kroku czasowego w przejściu granicznym

$$\tau = h^\alpha \rightarrow 0.$$

W przypadku, gdy $n = 1$ i $\alpha = 2$ oraz Π jest równa $1/2$ jedynie przy przejściu do sąsiedniej pozycji, t.zn. $\Pi(1) = \Pi(-1) = 1/2$ otrzymujemy w granicy równanie, czyli jednowymiarowy odpowiednik dla $\alpha = 2$

$$u_t = u_{xx}.$$

RUCH BROWNA, PROCES LEVY'EGO, STABILNY PROCES LEVY'EGO

Wzór Levy'ego-Chinczyna dla generatora procesu Levy'ego

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} + u \cdot \nabla b - \int (u(x-y) - u(y)) \Pi(dy)$$

gdzie a_{ij} dodatnio określona, a Π miara Borelowska taka, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \min 1, |y|^2 \Pi(dy) < \infty$$

jeśli $a = b = 0$ oraz

$$\Pi(dy) = c(\alpha) |y|^{-n-\alpha} dy$$

to otrzymujemy generator α -stabilnego procesu Levy'ego,

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = - \int (u(x-y) - u(y)) \Pi(dy)$$

np. ruch Browna składamy z podporządkowanym procesem Levy'ego. Jeśli $a_{ii} = 1$ oraz dla $i \neq j$ mamy $a_{ij} = b = \Pi = 0$ to otrzymujemy Laplasjan.

PUNKTY KRYTYCZNE

Punktem krytycznym funkcjonału K nazywamy u takie, że

$$K'(u) = 0$$

gdzie $K'(u)$ definiujemy np. dla $K \in C^1$ oraz normy $|\cdot|$ w $H_0^{\alpha/2}$ jako

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} (K(u+h) - K(u) - K'(u)h)/|h| = 0$$

Równanie

$$K'(u)h = 0$$

dla dowolnego $h \in H_0^{\alpha/2}$ oznacza właśnie krytyczność punktu u i odpowiada słabemu sformułowaniu odpowiedniego równania Eulera-Lagrange'a w zależności od postaci K .

ZBIEŻNOŚĆ SZEREGÓW FUNKCYJNYCH, T.ZN. CIĄGÓW SUM CZĘŚCIOWYCH

Szereg o wyrazach ciągłych g_k :

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

jest jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej jeśli, na przykład, istnieje oszacowanie jednostajne ze względu na x

$$|g_k(x)| \leq Ak^{-1-\alpha}$$

ew. przez inny szereg liczbowy niż $A \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\alpha} < \infty$ ale też zbieżny.

Zbieżność szeregu w L^2 w przypadku szeregu Fouriera

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \rho_k$$

jest równoważna zbieżności szeregu liczbowego

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 < \infty.$$

Zbieżność jednostajna pociąga za sobą zbieżność L^2 . Różniczkowanie wyrazu po wyrazie możliwe jest, gdy szereg pochodnych jest zbieżny, np. jednostajnie, ew. w L^2 i wtedy mamy pochodną funkcji granicznej danej przez szereg zdefiniowaną klasycznie lub odpowiednio w L^2 .