Warsztaty z równań różniczkowych cząstkowych – Toruń, 12–22.11.2002

Centrum Badań Nieliniowych im. J. Schaudera

Równania falowe

PIOTR BILER

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

pl. Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wrocław;

Instytut Matematyczny P.A.N. (2002–2003)

e-mail: Piotr.Biler@math.uni.wroc.pl

Spis treści

1. Wyprowadzenie równania struny; wzory d'Alemberta. Rozważamy drgania poprzeczne (w płaszczyźnie (x, y)) nieskończonej struny opisane funkcją $u = u(x, t)$, $x \in I\!R$, $t \in I\!R$. Zakładamy, że wychylenia części struny są tak małe, że napięcie struny jest stałe: $T =$ const. Oznaczmy przez $\varrho > 0$ gęstość liniową struny. Przyjmując, że struna jest doskonale wiotka, czyli że

2000 *Mathematics Subject Classification*: 35-01, 35L05

T działa w kierunku stycznym do struny, otrzymujemy z równania Newtona bilans sił:

$$\varrho \Delta x u_{tt} = T(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)).$$

Dzieląc obustronnie przez Δx i przechodząc do granicy $\Delta x \to 0$, dostajemy zatem

$$\varrho u_{tt} = T u_{xx}, \quad \text{czyli} \quad u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

gdzie $c^2 = T/\varrho$ określa (jak wkrótce zobaczymy) prędkość rozchodzenia się zaburzeń. Warto porównać ten ogromnie uproszczony model z wyprowadzeniem uwzględniającym subtelniejsze zjawiska fizyczne w [12]. W dalszym ciągu często przyjmować będziemy $c = 1$, co nie powoduje straty ogólności (wystarczy zamienić czas przechodząc od t do ct), rozpatrując równanie w postaci

$$u_{tt} = u_{xx}. \tag{1.1}$$

Wielowymiarowym analogonem równania struny jest równanie falowe

$$u_{tt} = \Delta u, \tag{1.2}$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a w $I\!R^N$: $\Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial {x_k}^2}$. Opisuje ono np. drgania cienkich membran ($N = 2$) i drgania (akustyczne, elektromagnetyczne) jednorodnych ośrodków ciągłych w trzech wymiarach ($N = 3$).

Wprowadzenie nowych zmiennych $\xi = x - t$ i $\eta = x + t$ w (1.1) prowadzi do prostego równania

$$u_{\xi\eta} = 0, \tag{1.3}$$

gdzie przez (tę samą literę u) $u(\xi, \eta) = u(x, t)$ oznaczamy (nową) funkcję u w nowych zmiennych. Natychmiast otrzymujemy stąd przez całkowanie

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta),$$

czyli po prostu

$$u(x, t) = \phi(x - t) + \psi(x + t) \tag{1.4}$$

z dowolnymi (odpowiednio regularnymi, np. C^2) funkcjami ϕ, ψ. Jak widać, proste o równaniach $x - t = \text{ const}$ i $x + t = \text{ const}$ są poziomicami pierwszego i drugiego, odpowiednio, składnika we wzorze d'Alemberta (1.4). Są one *charakterystykami*, wzdłuż których przenoszą się te same wartości funkcji ϕ i ψ odpowiednio, por. uwagi w rozdziale 10.

Definicja 1.1. *Zagadnieniem Cauchy'ego* dla równania (nieskończonej, niezamocowanej) struny (1.1) nazywamy problem znalezienia funkcji u :

$I\!R \times [0, \infty) \to I\!R$ takiej, że

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx} \\
u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

z zadanymi funkcjami (*danymi początkowymi*) f, g.

Proste całkowania prowadzą do następującej, konkretnej wersji wzoru d'Alemberta (1.4)

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ f(x-t) + f(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} g(s)\, ds \right\}. \qquad (1.6)
$$

Z tego wzoru widać, że zachodzi

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli $f \in C^2$ i $g \in C^1$, to u zadane wzorem (1.6) jest klasycznym ($u \in C^2$) rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (1.5).*

□

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie u w punkcie (x_0, t_0) zależy od wartości danych początkowych f i g na odcinku $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. *Obszarem wpływu* nazywamy stożek charakterystyczny przeszłości z wierzchołkiem w punkcie (x_0, t_0), tzn. zbiór $\{(x,t) : t \le t_0, |x - x_0| \le |t - t_0|\}$. Podobnie, *obszarem zależności* nazywamy stożek charakterystyczny przyszłości, tzn. $\{(x,t) : t \ge t_0, |x - x_0| \le |t - t_0|\}$.

Ponadto, rozwiązanie zagadnienia (1.5) zależy w sposób ciągły od danych początkowych:

$$
\|u - \tilde{u}\|_\infty \equiv \sup_{x,\, 0 \le t \le T} |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \le C(T)(\|f - \tilde{f}\|_\infty + \|g - \tilde{g}\|_\infty)
$$

dla pewnej ciągłej funkcji $C = C(T)$. Oszacowanie to można zlokalizować, pisząc normy supremum danych początkowych na sumie mnogościowej obszarów wpływu zbioru punktów, w których badana jest funkcja u.

2. Metody energetyczne. W badaniu charakteru zależności rozwiązań od wartości danych początkowych (nie tylko dla rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego ale również dla rozwiązań określonych tylko lokalnie) istotną rolę gra metoda energetyczna, w której bada się pewne funkcjonały całkowe od rozwiązań i ich pochodnych. Idea tej metody znajduje swoje rozwinięcie w teorii słabych rozwiązań równań hiperbolicznych wspomnianych w rozdziale 9.

Rozważmy dwa zagadnienia Cauchy'ego dla niejednorodnego równania falowego

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= \Delta u + F(x,t) \\
u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)
\end{aligned}
$$

oraz

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt} &= \Delta\tilde{u} + \tilde{F}(x,t)\\ \tilde{u}(x,0) &= \tilde{f}(x), \quad \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{g}(x),\end{aligned}$$

gdzie F i $\tilde{F}$ można interpretować jako siły zewnętrzne.

Twierdzenie 2.1 *Załóżmy, że $F = \tilde{F}$ w stożku charakterystycznym przeszłości $C = \{(x,t) : |x-x_0| \le t_0-t\}$, oraz $f = \tilde{f}$ i $g = \tilde{g}$ dla $\{x : |x-x_0| \le t_0\}$. Wówczas rozwiązania klasyczne u i $\tilde{u}$ pokrywają się we wszystkich punktach stożka C.*

Dowód. Funkcja $w = u - \tilde{u}$ spełnia jednorodne równanie falowe (1.2) wewnątrz stożka C. Przy tym $w(x,0) = 0$ i $w_t(x,0) = 0$ dla wszystkich $|x - x_0| \le t_0$. Oznaczając przez B_t przekrój stożka C na poziomie t: $B_t = \{(x,t) : |x - x_0| \le t_0 - t\}$, określamy funkcjonał energii w chwili t

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{B_t} |\nabla w|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{B_t} \left(|w_t|^2 + |\nabla_x w|^2\right) dx.$$

Pierwszy składnik w powyższym funkcjonale ma interpretację energii kinetycznej, a drugi — potencjalnej. Rozważając iloraz różnicowy E dla $t+h$ i t otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \int_{B_t} \left(w_t w_{tt} + \sum_{k=1}^{N} w_{x_k} w_{x_k t}\right) - \frac{1}{2}\int_{\partial B_t} \left(|w_t|^2 + |\nabla_x w|^2\right) dS(x),$$

a następnie, z twierdzenia o dywergencji,

$$\int_{B_t} \left(w_t w_{tt} + \sum_{k=1}^{N} w_{x_k} w_{x_k t}\right) = \int_{B_t} w_t (w_{tt} - \sum w_{x_k x_k}) + \int_{\partial B_t} \sum w_t w_{x_k} \overline{n}_k \, dS(x)$$

($\overline{n} = (\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do brzegu ∂B_t), ponieważ $w_{x_k} w_{x_k t} = (w_{x_k} w_t)_{x_k} - w_t w_{x_k x_k}$. Teraz nierówność Cauchy'ego–Schwarza prowadzi do

$$\sum w_t w_{x_k} \overline{n}_k \le |w_t| \left(\sum w_{x_k}^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{2}\left(|w_t|^2 + \sum |w_{x_k}|^2\right) = \frac{1}{2}|\nabla w|^2,$$

a następnie do nierówności różniczkowej

$$\frac{dE}{dt} = \int_{B_t} \left(\sum w_t w_{x_k} \overline{n}_k - \frac{1}{2}|\nabla w|^2\right) dS(x) \le 0.$$

Ponieważ $E(0) = 0$ i $E \ge 0$, otrzymujemy stąd $E \equiv 0$, czyli $|\nabla w| = 0$ prawie wszędzie w C i (uwzględniając $w(x,0) = 0$) w konsekwencji mamy $w(x,t) = 0$ w całym stożku C. □

Podobnie wprowadza się energię dla rozwiązań równań Maxwella, patrz zadanie 11. Konsekwencją równań Maxwella są równania falowe spełniane przez każdą składową pól elektrycznego E i magnetycznego B.

Dyskusję funkcjonałów, które są stałe w czasie wzdłuż rozwiązań równania falowego, można prowadzić w przypadku nieliniowego równania falowego

$$u_{tt} - \Delta u + F'(u) = 0, \tag{2.1}$$

gdzie funkcja F spełnia stosowne warunki regularności i wzrostu, por. [13]. Otóż równanie (2.1) jest warunkiem stacjonarnego działania (tzn. równaniem Eulera–Lagrange'a) dla lagrangianu $\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - \frac{1}{2}u_t^2$. W związku z tym, na mocy twierdzenia Noether, symetrie lagrangianu prowadzą do praw zachowania dla równania (2.1). I tak, *energia* $E = \int \left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)$ związana jest z niezmienniczością $\mathcal{L}$ (a więc i rozwiązań u) na przesunięcia w czasie; dlatego $\frac{d}{dt}E = 0$.

Niezmienniczość lagrangianu na translacje w przestrzeni implikuje zachowanie *momentów*: $\frac{d}{dt}\int u_t \nabla u = 0$, a zatem dla $N = 1$ (po wykorzystaniu stałości energii E): $\frac{d}{dt}\int |u_t \pm u_x|^2 = 0$. Ma to rzecz jasna związek z ekwipartycją energii, patrz zadanie 5.

Niezmienniczość równania (2.1) na skalowanie $u \mapsto \lambda^{\frac{N-1}{2}} u(\lambda x, \lambda t)$ prowadzi do tożsamości całkowej:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int \left(\frac{t}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + u_t x \cdot \nabla u + tF(u) + \frac{N-1}{2} u u_t\right) \\ = &\int \left(-\frac{N-1}{2} u F'(u) + (N+1)F(u)\right). \end{aligned}$$

Stąd, jeżeli

$$F(u) = C|u|^{2(N+1)/(N-1)},$$

to prawa strona jest zerem, i otrzymujemy niezmiennik równania (2.1).

Niezmienniczość konforemna: $\mathcal{L}$ jest niezmienniczy na przekształcenia $(x,t) \mapsto \frac{(x,t)}{|x|^2 - t^2} \equiv (x', t')$. Następnie skalujemy $u \mapsto ||x'|^2 - t'^2|^{\frac{N-1}{2}} u(x', t')$. W konsekwencji, przekształcenia Lorentza we współrzędnych (x', t') generują zachowanie konforemnej energii, momentów itp.:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int \left((t^2 + |x|^2)\left(\frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2) + F(u)\right) + 2tx \cdot \nabla u\, u_t \right. \\ &\left. + t(N-1)u u_t - \frac{N-1}{2}u^2\right) = -t\int ((N-1)uF'(u) - 2(N+1)F(u)); \end{aligned}$$

wyrażenie po prawej stronie znika przy założeniu postaci F jak wyżej.

3. Zagadnienie Cauchy'ego w 2 ($2k$) i 3 ($2k+1$) wymiarach.

W tej części zajmiemy się zagadnieniem Cauchy'ego dla wielowymiarowego równania falowego

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u \\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

dla funkcji $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, z zadanymi dla $t = 0$ funkcjami (*danymi początkowymi*) f, g.

Twierdzenie 3.1 *Jeżeli $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ i $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, to u dane wzorem Kirchhoffa*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{S(0,1)} f(x+ty)\,d\sigma(y)\right)\right. \\ &+ \left. t\int_{S(0,1)} g(x+ty)\,d\sigma(y)\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego (3.1) dla $N = 3$. $S(0,1)$ oznacza sferę jednostkową o środku w 0 w $\mathbb{R}^3$.

Dowód. Wystarczy użyć twierdzenia o dywergencji. □

Analogiczny wynik dla równania falowego w dwóch wymiarach jest znany jako

Twierdzenie 3.2 *Jeżeli $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ i $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, to u dane wzorem Poissona*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{B(0,1)} f(x+ty)(1-|y|^2)^{-1/2}\,dy\right)\right. \\ &+ \left. t\int_{B(0,1)} g(x+ty)(1-|y|^2)^{-1/2}\,dy\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego (3.1) dla $N = 2$. $B(0,1)$ jest kołem jednostkowym o środku w 0 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Wzór Poissona wynika łatwo ze wzoru Kirchhoffa po zastosowaniu metody zstępowania. Zauważmy, że jeżeli ogólniej: u jest rozwiązaniem równania falowego w $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, które nie zależy od x_N, to u jest również rozwiązaniem równania falowego w $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Kluczowe dla dowodu jest spostrzeżenie, że $dy = (1-|y|^2)^{1/2} d\sigma(y, y_N)$ i, że całkowanie w (3.2) przebiega po dwóch półsferach $|y|^2 + y_N^2 = 1$, $y_N > 0$ i $y_N < 0$, $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})$. □

Uwaga: ze wzoru Poissona można metodą zstępowania wyprowadzić również wzór (1.6). Natomiast w zadaniu 8 proponuje się wykazać własność średnich sferycznych dla funkcji harmonicznych używając do tego wzoru Kirchhoffa (3.2).

Założenia regularności w twierdzeniu Poissona 3.2 można nieco osłabić, patrz zadanie 10.

Podobnie, jeżeli funkcje f i g są radialnie symetryczne, założenia o ich regularności potrzebne do istnienia klasycznego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego można istotnie osłabić.

Twierdzenia 3.1 i 3.2 mają wielowymiarowe uogólnienia, których autorem jest włoski matematyk Tedone. Dowodzi się ich z pomocą transformaty Fouriera (por. [5], [8]) lub metodą średnich sferycznych.

Twierdzenie 3.3 *Jeżeli wymiar N jest liczbą nieparzystą, $f \in C^{(N+3)/2}(\mathbb{R}^N)$ i $g \in C^{(N+1)/2}(\mathbb{R}^N)$, to u dane wzorem*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (N-2)\sigma_N}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{N-3}{2}}\left(t^{N-2}\int_{S(0,1)} f(x+ty)\,d\sigma(y)\right)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{N-3}{2}}\left(t^{N-2}\int_{S(0,1)} g(x+ty)\,d\sigma(y)\right)\right] \end{aligned}$$

jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego (3.1).

Dowód. Definiujemy dla ciągłej funkcji ϕ zmiennej $x \in \mathbb{R}^N$ i $r > 0$ *średnie sferyczne* wzorem

$$M_\phi(x,r) = \frac{1}{\sigma_N}\int_{S(0,1)} \phi(x+ry)\,d\sigma(y).$$

Rozszerzamy tę definicję dla $r \in \mathbb{R}$ kładąc dla $r \le 0$

$$M_\phi(x,0) = \phi(x), \qquad M_\phi(x,r) = M_\phi(x,-r).$$

W ten sposób otrzymujemy dla każdego ustalonego x funkcję $M_\phi(x,.)$ ciągłą na $\mathbb{R}$, a dla bardziej regularnych funkcji ϕ ($\phi \in C^k$) odpowiednio gładsze średnie M_ϕ ($M_\phi \in C^k$). Dla funkcji ϕ określonych na $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \ni (x,t)$ rozważamy średnie $M_\phi(x,r;t)$ traktując t jako parametr (nie całkujemy względem tej zmiennej).

Zauważmy, że jeżeli $u = u(x,t)$ spełnia równanie falowe $u_{tt} = \Delta u$, to $M_u(x,r;t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}M_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u.$$

Wynika to z następujących obliczeń:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} M_u(x,r;t) &= \frac{1}{\sigma_N}\frac{\partial}{\partial r}\int_{S(0,1)} u(x+ry,t)\,d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\sigma_N}\int_{S(0,1)}\sum_{k=1}^{N} y_k \frac{\partial}{\partial y_k} u(x+ry,t)\,d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\sigma_N}\int_{S(0,1)} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} u(x+ry,t)\,d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\sigma_N}\int_{B(0,1)} r\Delta u(x+ry,t)\,dy = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\,dy \\
&= \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,dy = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_0^r\int_{S(x,\rho)} u_{tt}(y,t)\,d\sigma(y)\,d\rho.
\end{aligned}$$

Następnie mnożymy tę tożsamość przez r^{N-1} i różniczkujemy względem r dochodząc do:

$$\begin{aligned}
(N-1)r^{N-2}\frac{\partial}{\partial r}M_u &+ r^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u = \frac{1}{\sigma_N}\int_{S(x,r)} u_{tt}(y,t)\,d\sigma(y) \\
&= \frac{r^{N-1}}{\sigma_N}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{S(0,1)} u(x+ry,t)\,d\sigma(y) = r^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u.
\end{aligned}$$

Operator $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ jest laplasjanem dla funkcji radialnych na $I\!R^N$, a więc pokazaliśmy, że radialna funkcja $w(y,t) = M_u(x,|y|;t)$ spełnia równanie falowe.

Dalej obliczenia prowadzimy w najprostszym przypadku $N = 3$. Zacznijmy od spostrzeżenia, że jeżeli M_u, M_f, M_g są funkcjami r klasy C^2, to funkcje $v = rM_u$, $\phi = rM_f$ i $\psi = rM_g$ spełniają relacje

$$v(r;0) = \phi(r), \qquad v_t(r;0) = \psi(r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}v = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}M_u + M_u\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rM_u) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}v.$$

Stosując do v wzór d'Alemberta (1.6) dostajemy

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\phi(r+t) + \phi(r-t)\right\} + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t}\psi(s)\,ds.$$

Uwzględniając, że

$$u(x,t) = \lim_{r\searrow 0} M_u(x,r;t) = \lim_{r\searrow 0}\frac{1}{r}v(r;t),$$

i parzystość funkcji M_f i M_g (która implikuje nieparzystość ϕ i ψ), ostatecznie dochodzimy do wzoru Kirchhoffa (3.2)

$$u(x,t) = \lim_{r\searrow 0}\left[\frac{1}{2r}\left\{\phi(t+r) - \phi(t-r)\right\} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\psi(s)\,ds\right] = \frac{\partial\phi}{\partial r}_{|r=t} + \psi(t).$$

□

Twierdzenie 3.4 *Jeżeli wymiar N jest liczbą parzystą, $f \in C^{N/2+2}(\mathbb{R}^{2N})$ i $g \in C^{N/2+1}(\mathbb{R}^{2N})$, to u dane wzorem*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (N-1)\sigma_{N+1}} \\
&\times \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{B(0,1)} f(x+ty)(1-|y|^2)^{-1/2}\, dy \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{B(0,1)} g(x+ty)(1-|y|^2)^{-1/2}\, dy \right) \right]
\end{aligned}
$$

jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego.

Dowód otrzymujemy stosując metodę zstępowania dla wzoru w Twierdzeniu 3.3. □

Uwaga 3.1. Użycie transformacji Fouriera $\widehat{\phi}(\xi) = \int \phi(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx$ pozwala na alternatywne wyprowadzenie wzorów na rozwiązania równania falowego. Mianowicie, kluczowe jest określenie *rozwiązania fundamentalnego* czyli dystrybucji $E = E_N$ spełniającej równanie $E_{tt} - \Delta E = \delta(t)$ w sensie przestrzeni dystrybucji $\mathcal{D}'$. $\delta = \delta(t)$ oznacza tu dystrybucję Diraca. Przechodząc do transformat Fouriera względem zmiennych przestrzennych $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \xi \in \mathbb{R}^N$ otrzymujemy

$$\widehat{E}_{tt} + |\xi|^2 \widehat{E} = \mathbf{1}(t),$$

co prowadzi przez proste całkowanie równania różniczkowego zwyczajnego do $\widehat{E}_N(\xi,t) = \mathbf{1}(t)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$. W szczególności, dla $N = 3$ można sprawdzić, że $E_3(x,t) = \mathbf{1}(t)\frac{1}{4\pi t}\delta_{S(0,t)}(x)$, gdzie $\delta_{S(0,t)}$ oznacza miarę skupioną na powierzchni sfery o promieniu t.

Uwaga 3.2. Wzory w twierdzeniach 3.3 i 3.4 zgadzają się jakościowo z twierdzeniem o jednoznaczności: u w punkcie (x_0, t_0) zależy od wartości f i g w kuli $\{x : |x - x_0| \le t_0\}$.

Dokładniej: Dla $N = 1$ u zależy od wartości g na $\{x : |x - x_0| \le t_0\}$ i od f dla $x - x_0 = \pm t_0$. Dla $N = 3$ (i dla $N \ge 3$ nieparzystych): u zależy od wartości f i g na dowolnie małym otoczeniu sfery $\{x : |x - x_0| = t_0\}$. Dla $N = 2$ (i dla N parzystych): u zależy od wartości f i g na całej kuli $\{x : |x - x_0| \le t_0\}$, ale większy wpływ na u mają wartości danych początkowych w pobliżu sfery $\{x : |x - x_0| = t_0\}$.

Oznacza to, że w $\mathbb{R}^3$ pakiety falowe są zlokalizowane, natomiast w $\mathbb{R}^2$ zachodzi *dyfuzja fal*.

4. Zasada Huygensa. Wyniki otrzymane w poprzednim rozdziale można zinterpretować w następujący sposób:

w $\mathbb{R}^3$ pakiety falowe opisane równaniem (1.2) mają wyraźne fronty i końce (czoła i tyły) fali, natomiast w $\mathbb{R}^2$ front fali jest wyraźny, natomiast fala gaśnie powoli do zera.

Ściślej można to sformułować dla $N = 3$ w następujący sposób:

Wniosek 4.1 *Jeżeli dane początkowe f, g mają zwarte nośniki i $S = \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$, to $u(x,t) = 0$ dla wszystkich $t \notin [t_1(x), t_2(x)]$, gdzie $t_1(x) = \inf\{t > 0 : S(x,t) \cap S \neq \emptyset\}$, $t_2(x) = \sup\{t > 0 : S(x,t) \cap S \neq \emptyset\}$.*

Opierając się na zasadzie Huygensa łatwo zinterpretować wynik z zadania 1 dla $k = \pm 1$. Nie można bowiem żądać, aby na charakterystyce równania (po której propagują się zaburzenia) spełnione były dwa niezależne warunki na rozwiązanie.

5. Zagadnienie niejednorodne – zasada Duhamela. Zagadnienie początkowe dla niejednorodnego równania falowego w $\mathbb{R}^N$

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= \Delta u + F \\
u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

rozwiążemy (podobnie jak to robi się dla innych niejednorodnych zagadnień liniowych) poszukując u w postaci sumy $u = u_1 + u_2$, gdzie u_1 i odpowiednio u_2 spełniają warunki

$$
\begin{aligned}
(u_1)_{tt} &= \Delta u_1 + F \\
u_1(x,0) &= 0, \quad (u_1)_t(x,0) = 0,
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
(u_2)_{tt} &= \Delta u_2 \\
u_2(x,0) &= f(x), \quad (u_2)_t(x,0) = g(x).
\end{aligned}
$$

Twierdzenie 5.1 *Zasada Duhamela. Jeżeli $F \in C^{[N/2]+1}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, a przez $v(x,t;s)$ jest oznaczone rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego*

$$
\begin{aligned}
v_{tt} &= \Delta v \\
v(x,0;s) &= 0, \quad v_t(x,0;s) = F(x,s),
\end{aligned}
$$

to u_1 jest superpozycją rodziny funkcji $v = v(.,.;s)$

$$u_1(x,t) = \int_0^t v(x,t-s;s)\,ds.$$

Dowód. Jak łatwo widać: $u_1(x,0) = 0$. Natomiast $(u_1)_t = v(x,0;t) + \int_0^t v_t(x,t-s;s)\,ds = \int_0^t v(x,t-s;s)\,ds$ znika dla $t=0$. Ponadto

$$(u_1)_{tt} - \Delta u_1 = v_t(x,0;t) + \int_0^t (v_{tt} - \Delta v)(x,t-s;s)\,ds = v_t(x,0;t) = F(x,t),$$

co kończy dowód. □

6. Metoda Fouriera dla zagadnień brzegowych. Matematyczną idealizacją opisu drgań struny zaczepionej (tak jak w instrumentach muzycznych) jest zagadnienie początkowo-brzegowe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \end{aligned} \tag{6.1}$$

gdzie $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$. Długość struny została (bez straty ogólności) wybrana równą π. Warunek $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ oznacza sztywne zamocowanie struny, ale można byłoby zamiast niego przyjąć np. $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ lub inne liniowe warunki brzegowe.

Wprawdzie wzór d'Alemberta (1.4) wyznacza dowolne rozwiązanie równania, ale niełatwo byłoby znaleźć funkcje ϕ, ψ tak aby spełnione były warunki brzegowe (i początkowe) tak, jak zrobić to można w zadaniu 2 w zagadnieniu na półprostej $\mathbb{R}^+$. Istotnie, zaburzenia rozchodzą się wzdłuż charakterystyk $x+t=$ const, $x-t=$ const, a przy spotkaniu brzegu "odbijają się" zmieniając fazę. Po kilku takich odbiciach wzory na ϕ i ψ byłyby bardzo skomplikowane. Posłużymy się więc inną metodą (pochodzącą od J. Fouriera a zastosowaną po raz pierwszy dla równania przewodnictwa cieplnego), polegającą na rozdzieleniu zmiennych. Otóż, chcemy znaleźć rozwiązania równania (1.1) postaci $u(x,t) = w(x)T(t)$ dla pewnych (odpowiednio regularnych) funkcji w, T jednej zmiennej. Oznaczając pochodne przez $\dot{} = d/dt$ i $' = d/dx$, otrzymujemy

$$\ddot{T}w = Tw'', \quad \text{tzn.} \quad \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{w''}{w} = \text{const}.$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia na wartości własne dla funkcji w jest oczywiście $w(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$, jeżeli const $= -k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy $w(x) = c_1 \sin kx$ i $T(t) = d_1 \sin kt + d_2 \cos kt$. Równanie (1.1) jest liniowe, a zatem można rozważać superpozycje takich (elementarnych) rozwiązań, czyli

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$$

dla współczynników a_k, b_k (pochodzących od stałych c_1 i d_1 dla różnych k) spełniających

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = f(x), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin kx = g(x).$$

Powyższe formalne obliczenia wymagają aby *szereg Fouriera* przedstawiający u był zbieżny, podobnie jak i szeregi zróżniczkowane. Aby otrzymać rozwiązanie u klasyczne, należy jeszcze dodać założenia np. $f \in C^4$, $g \in C^3$ gwarantujące jednostajną zbieżność szeregów Fouriera przedstawiających u, u_{xx}, u_{tt}. Rzeczywiście, wtedy $a_k = \mathcal{O}(k^{-4})$, $b_k = \mathcal{O}(k^{-3})$.

W zadaniu 3 zobaczymy, że "rozsądne" warunki początkowe nie muszą wcale prowadzić do rozwiązań klasycznych (6.1). W rozdziale 9 zostanie pokazane, jak można uogólnić pojęcie rozwiązania aby nadać sens formalnym rozwiązaniom z zadania 3.

Uwaga 6.1. Zagadnienie brzegowe dla równania falowego w prostokącie jest źle postawione. To znaczy, że na ogół nie można zadać wartości u na całym brzegu obszaru czasowo-przestrzennego Ω (por. własności charakterystyk równania falowego). Zadziwiające jest przy tym, że warunki rozwiązalności zależą od własności algebraicznych ilorazu długości boków prostokąta.

7. Zagadnienie na wartości własne dla laplasjanu. Nietrudno zauważyć, że procedurę z poprzedniego rozdziału można uogólnić na przypadek równania (1.2) uzupełnionego warunkami brzegowymi i początkowymi. Rozdzielenie zmiennych $u(x,t) = w(x)T(t)$ prowadzi wówczas (w przypadku jednorodnych warunków Dirichleta na brzegu obszaru $\Omega \subset I\!\!R^N$) do zagadnienia na wartości własne dla równania Helmholtza

$$\begin{aligned} \Delta w + \lambda w &= 0 \\ w_{|\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Można oczywiście rozważać inne (liniowe) warunki brzegowe, np. warunek Neumanna $\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = 0$ na $\partial\Omega$, czy warunek Robina $w + c\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = 0$ na $\partial\Omega$.

W niektórych przypadkach zagadnienie (7.1) można rozwiązać uzyskując jawne formuły na funkcje własne w i wartości własne λ.

Przykład 7.1. $\Omega = \prod_{k=1}^{N}(0, a_k) \subset I\!\!R^N$ jest prostopadłościanem. Wówczas dla $N = 1$ m-ta funkcja własna jest postaci $u_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a_1}$, a m-ta wartość własna jest równa $\lambda = \pi^2\frac{m^2}{a_1^2}$. W wyższych wymiarach otrzymujemy funkcje własne postaci

$$u_{m_1\ldots m_N}(x) = \prod_{k=1}^{N} \sin\frac{m_k \pi x_k}{a_k}$$

wraz z wartościami własnymi

$$\lambda = \lambda_{m_1 \ldots m_N} = \pi^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k^2}{a_k^2};$$

m_k są tu dodatnimi liczbami całkowitymi.

Przykład 7.2. $\Omega = B(0,1) \subset I\!R^2$ jest kołem na płaszczyźnie. W tym przypadku równanie Helmholtza $\Delta w + \lambda w = 0$ rozwiązujemy rozdzielając zmienne w biegunowym układzie współrzędnych: $w(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)$. Pamiętając o postaci laplasjanu w zmiennych biegunowych $\Delta w = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta}$, dochodzimy do układu

$$
\begin{aligned}
r^2 R'' &+ rR' + (\lambda r^2 - n^2) R = 0 \\
\Theta'' &+ n^2 \Theta = 0.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Równanie (7.2) nazywa się równaniem Bessela. Warunki brzegowe implikują, że $R(1) = 0$, a funkcja Θ jest okresowa z okresem 2π i stąd $n \in I\!N$.

Rozwiązaniami równania (7.2) są funkcje związane z funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, rzędu n, oznaczanymi tradycyjnie J_n i Y_n, tzn. $R(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r)$ dla pewnego λ. Używając metody Frobeniusa można uzyskać ich przedstawienia za pomocą iloczynów potęg z i szeregów potęgowych. Mianowicie

$$
\begin{aligned}
J_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \\
Y_n(z) &= \frac{1}{\pi} \left\{ 2J_n(z) \log \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \right. \\
&- \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \left(\Psi(n+k+1) + \Psi(k+1)\right) \right\},
\end{aligned}
$$

gdzie $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ jest pochodną logarytmiczną funkcji Γ Eulera. Faktycznie, rozwiązanie zagadnienia na wartości własne w kole zawiera tylko funkcje J_n regularne w $z = 0$. Ostatecznie dostajemy

$$w_{nm}(r,\vartheta) = J_n(k_{nm} r)(c_1 \sin n\vartheta + c_2 \cos n\vartheta),$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$. Ponieważ $R(1) = 0$, a więc $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$ i $\sqrt{\lambda} = k_{nm}$ jest m-tym pierwiastkiem n-tej funkcji Bessela J_n. Interesujące jest prześledzenie zachowania się funkcji własnych w_{nm}, w tym badanie *linii węzłów* $\{x : w_{nm}(x) = 0\}$.

W wyższych wymiarach ważnymi funkcjami specjalnymi są *harmoniki sferyczne* związane z funkcjami własnymi laplasjanu w $I\!R^N$.

W ogólnym przypadku zachodzi

Twierdzenie 7.1 *Jeżeli $\Omega \subset I\!R^N$ jest obszarem ograniczonym, to istnieje ciąg wartości własnych λ_m, który rośnie do nieskończoności. Unormowane funkcje własne $\{w_m\}$ tworzą ciąg ortonormalny zupełny w przestrzeni $L^2(\Omega)$.*

$\square$

Jak szybko rosną wartości własne można łatwo prześledzić na przykładzie kostki $\prod_{k=1}^N (0,a)$ w $I\!R^N$. Otóż wartość $\mu_m = \frac{a^2}{\pi^2}\lambda_m = \sum_{k=1}^N m_k^2$ jest kwadratem odległości punktu kratowego o współrzędnych $(m_1,\ldots,m_N)$, $m_k > 0$, od 0. Punktów kratowych w kuli o promieniu R, $R \to \infty$, jest asymptotycznie $2^{-N}\omega_N R^N$. Stąd obliczamy, że $m \sim \pi^{\frac{N}{2}} 2^{1-N} \left(N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{-1} R^N$, czyli innymi słowy $\lambda_m \sim R^2 \sim c_N m^{\frac{2}{N}} = \mathcal{O}(m^{\frac{2}{N}})$ gdy $m \to \infty$. Okazuje się, że analogiczny wynik zachodzi dla dowolnych obszarów ograniczonych $\Omega \subset I\!R^N$, co udowodnił w 1911 roku H. Weyl, rozwiązując problem postawiony przez D. Hilberta.

Twierdzenie 7.2 *(H. Weyl, L. Hörmander) Dla gładkich obszarów ograniczonych $\Omega \subset I\!R^N$ zachodzi relacja asymptotyczna*

$$\lambda_m \sim 4\pi \left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}} m^{\frac{2}{N}}, \quad \text{gdy} \quad m \to \infty.$$

$\square$

Uniwersalność tego wyniku zainspirowała M. Kaca do postawienia pytania: "*Czy można usłyszeć kształt bębna?*", co matematycznie można sformułować jako pytanie: "*Czy obszary, dla których ciągi wartości własnych laplasjanu są takie same, są izometryczne?*" Negatywną odpowiedź na ten problem podali w 1992 roku Gordon, Webb i Wolpert, konstruując nieprzystające wielokąty (i wielościany) o identycznych widmach, tzn. zbiorach wartości własnych.

Zagadnienie (7.1) można sformułować w postaci wariacyjnej. Mianowicie,

$$\lambda_1 = \inf_{v \not\equiv 0,\, v_{|\partial\Omega}=0} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2}{\int_\Omega v^2},$$

a funkcja realizująca kres jest równa pierwszej funkcji własnej. Jest ona stałego znaku wewnątrz Ω. Następnie zachodzi *zasada minimaksowa*:

$$\lambda_{m+1} = \max_{v_1,\ldots,v_m} \min_{\left\{v \not\equiv : \int_\Omega v v_j = 0,\, j=1,\ldots,m,\, v_{\partial\Omega}=0\right\}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2}{\int_\Omega v^2}.$$

Istotnie, równanie Helmholtza jest konsekwencją równań Eulera–Lagrange'a dla powyższego zagadnienia minimalizacji z więzami, a λ_m są kolejnymi mnożnikami Lagrange'a.

8. Tłumione równanie falowe. Równanie linii telegraficznej

$$u_{tt} + 2ku_t = \Delta u \tag{8.1}$$

opisuje dla $N = 1$ rozchodzenie się tłumionych sygnałów w przewodzie linii telegraficznej, który charakteryzuje się niezerowym oporem. Jest ono również użyteczne jako hiperboliczny model rozprzestrzeniania się ciepła dla $N \geq 1$ w (nieco innej) postaci $\varepsilon u_{tt} + u_t = \Delta u$ z $0 < \varepsilon \ll 1$. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania (8.1) z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0$$

udaje się rozwiązać dzięki następującemu podstawieniu z [7, §76.16]: $w(x,z,t) = u(x,t)e^{kz}$. W istocie, funkcja w spełnia równanie falowe (1.2) w wymiarze $N+1$: $w_{tt} = \Delta w + w_{zz}$, z warunkami początkowymi

$$w(x,z,0) = f(x)e^{kz}, \quad w_t(x,z,0) = 0.$$

W szczególności dla $N = 1$ fale w linii telegraficznej ulegają dyfuzji, czyli propagują się inaczej niż opisuje to wzór d'Alemberta (1.6) dla nietłumionego równania falowego z $N = 1$, ponieważ do otrzymania w stosujemy wzór Poissona (3.3).

Rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego dla równania (8.1) pozwalają na dokładniejsze zbadanie efektu asymptotycznie parabolicznego zachowania się rozwiązań dla $t \to \infty$. Istotnie, w otrzymanych z metody Fouriera rozwiązaniach elementarnych mamy $T(t) = \exp\left(-\left(k \pm \sqrt{k^2 - \lambda}\right) t\right)$, co dla wartości własnych $\lambda < k^2$ nie wprowadza oscylacji typowych dla rozwiązań równania falowego. Dopiero dla dużych λ pojawiają się drgania o amplitudzie tłumionej czynnikiem e^{-kt}.

9. Słabe rozwiązania. Konstrukcję słabych rozwiązań zagadnienia brzegowo-początkowego z warunkiem Dirichleta

$$\begin{aligned} u_{tt} &- \Delta u = F \\ u(0) &= f, \quad u_t(0) = g, \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{9.1}$$

przedstawimy wg schematu z [11] (por. [10]), który uogólnia znaną nam metodę Fouriera na metodę (Faedo–)Galërkina. *Przestrzenią energetyczną* operatora $A = -\Delta$ z warunkiem Dirichleta na brzegu $\partial\Omega$ jest klasyczna przestrzeń Sobolewa $H = H_0^1(\Omega)$. W dalszym ciągu użyjemy oznaczenia $[.,.]$ na *energetyczny iloczyn skalarny* $[u,v] = (A^{1/2}u, A^{1/2}v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ w przestrzeni H, i $\mathcal{D}(A)$ na *dziedzinę* operatora A.

Definicja 9.1. *Rozwiązanie słabe* jest elementem przestrzeni $\mathcal{X} = C([0,\infty), H) \cap C^1([0,\infty), L^2(\Omega))$ takim, że tożsamość

$$-\int_0^T \left(\frac{du}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right) dt + \int_0^T [u,\eta]\, dt - (g, \eta(0)) = \int_0^T (F,\eta)\, dt \tag{9.2}$$

zachodzi dla wszystkich funkcji próbnych $\eta \in \mathcal{X} \cap \{\eta(T) = 0\}$, $0 < T < \infty$. Ponadto od słabego rozwiązania wymaga się aby warunek początkowy $u(0) = f$ spełniony był w sensie granicy $\lim_{t\searrow 0}[u(t) - f, u(t) - f] = 0$.

Tożsamość (9.2) jest otrzymana ze wzoru

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}, \eta(t)\right) + (Au, \eta(t)) = (F(t), \eta(t)),$$

co w skrócie zapisuje się jako

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}, \eta\right) + [u,\eta] = (F,\eta),$$

przez całkowanie przez części względem t (i względem x w drugim wyrazie)

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}, \eta\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}, \eta\right) - \left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right).$$

Sensownymi założeniami o regularności danych są: $f \in H$, $g \in L^2(\Omega)$, $F \in C([0,T); L^2(\Omega))$.

Nietrudno zauważyć, że słabe rozwiązanie u takie, że $u \in C^1([0,\infty), \mathcal{D}(A)) \cap C^2((0,\infty), \mathcal{D}(A))$ jest rozwiązaniem klasycznym.

Rozwiązania słabe zagadnienia (9.1) są jednoznaczne, co wynika z zastosowania tego samego dowodu (metodą energetyczną) co dla rozwiązań klasycznych. Istnienia słabych rozwiązań dowodzi się poszukując u w postaci szeregu $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) u_k$, gdzie $c_k(t) = (u(t), u_k)$, u_k są funkcjami własnymi A: $Au_k = \lambda_k u_k$. Szereg $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} c_k(t) \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k$ jest zbieżny w H. Do testowania wybieramy funkcje $\eta(t) = (T-t)u_k$ i pamiętając, że $[u(t), u_k] = \lambda_k c_k(t)$, po standardowych obliczeniach dostajemy

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (f, u_k) \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (g, u_k) \sin\sqrt{\lambda_k} t \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau) F_k(\tau)\, d\tau \right\}, \end{aligned}$$

o ile rozwiązanie istnieje (jednoznaczność zachodzi). Sprawdzenie (czyli synteza) tego wzoru przebiega wg schematu: najpierw dla równania jednorodnego, a następnie dla niejednorodnego ustala się zbieżność w przestrzeni H (niemal jednostajną względem t); następnie pokazuje się zbieżność $\frac{du}{dt}$ w przestrzeni $L^2(\Omega)$, i wreszcie spełnianie warunków początkowych.

Inną metodą praktycznego rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych dla równania falowego jest metoda siatek, gdzie pochodne występujące w równaniu aproksymuje się ilorazami różnicowymi, por. [6].

W tych wykładach zazwyczaj rozważane były rozwiązania klasyczne. Rozwiązania w sensie słabym (w przestrzeniach Sobolewa) i jeszcze ogólniejsze rozwiązania w sensie dystrybucyjnym są systematycznie badane m.in. w [9] i [10].

10. Uwagi o zagadnieniu Cauchy'ego dla innych równań.

Klasyfikacja równań różniczkowych drugiego rzędu;
Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu są — z punktu widzenia konkretnych zastosowań jak również abstrakcyjnej teorii — najbardziej interesujące. Nic więc dziwnego, że ich teoria rozwijała się najwcześniej i osiągnęła zdecydowanie najlepszy stan spośród różnych rozdziałów teorii równań cząstkowych. Nie znaczy to, że równania wyższego rzędu niż dwa nie są badane. Zacytujmy tu przykładowo słynne równanie Kortewega–de Vriesa $u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0$, wyprowadzone w 1895 roku, a modelujące rozchodzenie się fal na płytkiej wodzie w kanale, a więc fal podlegających *dyspersji*. Równanie to jest nieliniowe, trzeciego rzędu, i ma intrygujące własności algebraiczno-geometryczne, niezależnie od bogactwa efektów jakościowych opisywanych przez jego rozwiązania (np. solitony i ich oddziaływania). Innym ważnym równaniem wyższego rzędu jest równanie (liniowych) drgań belki (czwartego rzędu) $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$, typowe dla teorii sprężystości.

Powróćmy jednak do równań drugiego rzędu i to liniowych, a więc do równań postaci $Lu = F$, gdzie

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u.$$

Pierwszy składnik zawierający wszystkie pochodne u drugiego rzędu nazywany jest *częścią główną*. Decyduje on nie tylko o charakterze równania i zachowaniu się jego rozwiązań, ale również determinuje jakiego typu dodatkowe założenia (warunki początkowe, brzegowe, ...) dodaje się do równania $Lu = F$ aby otrzymać sensownie postawione zagadnienie.

Definicja 10.1. L jest operatorem *eliptycznym* jeżeli macierz $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^N$ jest ściśle dodatnio (lub ściśle ujemnie) określona. Typowym przykładem operatorów eliptycznych jest operator Laplace'a $L = \Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ i operator Schroedingera $-\Delta + V$, gdzie $V = V(x)$ jest potencjałem. Definicja eliptyczności oczywiście nie zależy od wyrazów niższego rzędu takich jak Vu w (stacjonarnym) równaniu Schroedingera.

Operator L nazywa się *hiperbolicznym*, jeżeli macierz współczynników $A(x)$ jest w każdym punkcie x sygnatury $(1, N)$ lub $(N, 1)$. Kanonicznym przykładem jest operator falowy czyli d'alembertian $L = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Operator L nazywa się *parabolicznym*, jeżeli macierz A definiuje formę półokreśloną. W szczególności, operator z równania przewodnictwa cieplnego $L = \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}$ jest paraboliczny.

Poza tą klasyfikacją są oczywiście inne operatory, np. operator ultrahiperboliczny typu $Lu = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4}$, czy operator Tricomiego $Lu = x_2u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2}$ zmiennego typu w zależności od znaku x_2.

Okazuje się, że — w przeciwieństwie do teorii równań różniczkowych zwyczajnych — niewiele jest wyników o istnieniu rozwiązań ogólnych liniowych równań różniczkowych cząstkowych typu $Lu = F$.

Jeżeli L ma stałe współczynniki, to tak jest: dla dowolnej funkcji F równanie $Lu = F$ ma lokalnie rozwiązanie (twierdzenie Malgrange'a–Ehrenpreisa–Łojasiewicza z początku lat pięćdziesiątych XX wieku). Ale już dla przypadku zmiennych współczynników H. Lewy w 1957 roku podał przykład równania (o współczynnikach zespolonych) nie posiadającego rozwiązań. Przykład ten uproszczony został przez Garabediana i Gruszyna. Jeżeli równanie $u_{x_1} + ix_1u_{x_2} = F(x_1, x_2)$ ma rozwiązanie, to u jest funkcją analityczną (a więc jego rozwiązania nie mogą istnieć dla F nieanalitycznych).

Aby zrozumieć gdzie można (a gdzie nie należy) nakładać dodatkowe warunki na rozwiązanie, potrzebne jest pojęcie *powierzchni charakterystycznej*.

Definicja 10.2. (Hiper)powierzchnia $S = \{\Phi = 0\}$, gdzie $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, nazywa się *charakterystyczną* dla operatora L, jeżeli w każdym punkcie $x \in S$ spełnione jest równanie (nieliniowe, pierwszego rzędu) $(A(x)\nabla\Phi, \nabla\Phi) = 0$.

Stąd widać, operatory eliptyczne nie posiadają (rzeczywistych) powierzchni charakterystycznych. Dla równania przewodnictwa cieplnego równanie $|\nabla_x\Phi| = 0$ oznacza, że powierzchnie $\{t = \text{const}\}$ są charakterystyczne. Dla d'alembertianu stożki o równaniach $|x - x_0| \pm (t - t_0) = 0$ są powierzchniami charakterystycznymi.

W przypadku dwóch zmiennych $N = 2$, krzywe charakterystyczne dla operatora $a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ można wyznaczyć z równania $a(x_2')^2 - 2bx_2' + c = 0$, ponieważ $\Phi(x_1, x_2) = 0$ określa krzywą $x_2 = x_2(x_1)$ (lub

$x_1 = x_1(x_2)$), dla której $\Phi_{x_1} + \Phi_{x_2} x_2' = 0$, a zatem $x_2' = -\Phi_{x_1}/\Phi_{x_2}$. Ostatecznie równania $x_2' = a^{-1}\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)$ określają dwie rodziny krzywych charakterystycznych (o ile, rzecz jasna, $b^2 > ac$).

Podobnie jak zasada Huygensa 4.1 mówi o rozchodzeniu się fal, można powiedzieć ogólniej, że osobliwości (lub zaburzenia) rozwiązań propagują się wzdłuż charakterystyk.

Twierdzenie typu Cauchy'ego–Kowalewskiej

Jednym z niewielu ogólnych wyników w teorii równań różniczkowych cząstkowych jest twierdzenie Cauchy'ego–Kowalewskiej(–Darboux–Goursata) mówiące o rozwiązaniach analitycznych zagadnień początkowych (czyli zagadnień Cauchy'ego) dla równań o współczynnikach i danych analitycznych postawionych na powierzchniach analitycznych, które nie są charakterystyczne (w żadnym punkcie).

Przykład 10.1. Z wzoru d'Alemberta (1.6) łatwo można wywnioskować, że dla danych początkowych (f, g) analitycznych rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego jest analityczne.

Natomiast dla równania przewodnictwa cieplnego poniższy przykład pochodzący od S. Kowalewskiej pokazuje, że zadanie warunku analitycznego na powierzchni charakterystycznej może prowadzić do kłopotów (rozwiązanie nie jest analityczne):

Przykład 10.2.

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = \left(1 + x^2\right)^{-1}.$$

Gdyby istniało rozwiązanie analityczne w otoczeniu punktu $(0,0)$, to $u(x,t) = \sum u_{mn} x^m t^n$, a współczynniki u_{mn} spełniałyby relacje

$$u_{2m+1,n} = 0, \qquad u_{2m,n} = (-1)^{m+1}(2m+2n)!/((2m)!n!).$$

Szereg z takimi współczynnikami jest rozbieżny w otoczeniu każdego punktu $(0,t)$, $t > 0$.

Najbardziej chyba ogólną postacią równań (a raczej układów równań), dla których można udowodnić twierdzenie o analityczności rozwiązań, jest następująca (układ równań quasiliniowych w postaci normalnej)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} G_{ijk}(u_1, \ldots, u_m) \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \\ u_i(x,0) &= \phi_i(x), \qquad (x,t) \in I\!R^N \times I\!R. \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.1 *(typu Cauchy'ego–Kowalewskiej) Jeżeli współczynniki G_{ijk} i dane początkowe ϕ_i są analityczne, to w otoczeniu dowolnego punktu*

$(x,0)$ *istnieje (lokalne) rozwiązanie analityczne postaci* $u_i(x,t) = \sum_{\alpha,\ell} c^i_{\alpha\,\ell} x^\alpha t^\ell$. *Rozwiązanie to jest jednoznaczne w szerszej klasie* $u \in C^\infty$ *funkcji gładkich (to ostatnie stwierdzenie pochodzi od Holmgrena).*

Uwaga: zagadnienie Cauchy'ego z danymi na powierzchni niecharakterystycznej redukuje się do takiego właśnie układu.

Przykład 10.3. (Istotność założeń o analityczności) Rozważmy równanie Laplace'a $\Delta u = 0$ w $\mathbb{R}^3$ (wystarczy lokalnie) z warunkami Cauchy'ego $u(x_1,x_2,0) = \varphi(x_1,x_2)$, $\frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1,x_2,0) = 0$. Ponieważ funkcje harmoniczne są analityczne, więc powyższe zagadnienie nie może mieć rozwiązań gdy φ nie jest funkcją analityczną.

Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego nie musi zależeć w ciągły sposób od danych początkowych. Jest tak jednak dla równań typu hiperbolicznego, por. uwagę po twierdzeniu 1.1 — mówimy wtedy, że zagadnienie jest *dobrze postawione.*

Przykład 10.4. (Hadamarda) (nieciągłość rozwiązań względem danych początkowych). Rozważmy równanie Laplace'a $\Delta u = 0$ w kole $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, z warunkami $u(x_1,0) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx_1$, $u_{x_2}(x_1,0) = 0$. Rozwiązania (jedyne!) mają postać $u = u_n$, $u_n(x_1,x_2) = e^{-\sqrt{n}} \cosh(nx_2) \cos nx_1$. Widać, że $u_n(x_1,0) \to 0$ gdy $n \to \infty$ (nawet wraz z pochodnymi: $\frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^k}(x_1,0) \to 0$ dla każdego k). Niemniej jednak $\sup_n |u_n(x_1,x_2)| = \infty$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^2$ z $x_2 \neq 0$.

11. Nieliniowe równania falowe i inne uwagi. Nieliniowe równania falowe uogólniające (2.1) pojawiają się w relatywistycznej mechanice kwantowej. Dla przykładu rozważmy równanie Liouville'a $u_{tt} - u_{xx} = ge^u$ oraz równanie sine-Gordona $u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u$. Na ogół, dla równań typu (2.1) nie można znaleźć jawnych wzorów na rozwiązania (typu (1.4)), ale dla powyższych przykładów znane są rodziny rozwiązań typu (uogólnionej) *biegnącej fali* równe

$$u(x,t) = \log \frac{8\phi'(x+t)\psi'(x-t)}{g(\phi(x+t) - \psi(x-t))^2}$$

(z funkcjami $\phi, \psi \in C^3$ i $\phi', \psi' > 0$) oraz

$$u(x,t) = 4\operatorname{arc\,tg}\left(\exp\left(\pm\sqrt{\frac{g}{1-a^2}}(x - at - x_0)\right)\right), \quad 0 < a < 1,$$

odpowiednio.

Kompletne wyniki dotyczące istnienia, regularności i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań typu $u_{tt} - \Delta u = \pm u^p$ znane są stosunkowo od niedawna, i istotnie zależą od wartości wykładnika p. Asymptotykę rozwiązań równań typu (2.1) dla $t \to \infty$ udaje się w niektórych przypadkach określić z pomocą (nieliniowej) *teorii rozpraszania.* Chodzi tu oznalezienie warunku początkowego $\psi = (f, g)$ takiego, że $\|u(t) - T_0(t)\psi\| \to 0$ gdy $t \to \infty$, gdzie $u(t)$ jest rozwiązaniem równania nieliniowego, a $T_0(t)\psi$ jest rozwiązaniem liniowego równania falowego $v_{tt} - \Delta v = 0$ z warunkiem początkowym ψ zależnym od $u(t)$, $\|.\|$ oznacza normę w pewnej funkcyjnej przestrzeni Banacha. Dokładniejsze wyniki typu $\|u(t) - T_0(t)\psi\| = o(\|T_0(t)\psi\|)$ interpretuje się jako asymptotycznie liniowe zachowanie się rozwiązań równa - nia nieliniowego.

Natomiast *liniowa teoria rozpraszania* zajmuje się opisem asymptotyki liniowej (pół)grupy operatorów za pomocą specjalnych trajektorii pewnej znanej liniowej (pół)grupy operatorów. W konkretnym przypadku równania falowego $v_{tt} - \Delta v = 0$ i równania Kleina–Gordona $u_{tt} - \Delta u + Vu = 0$ z zadanym potencjałem $V = V(x)$ "małym" dla $|x| \to \infty$, interesuje nas tu wyznaczenie asymptotyki rozwiązania dla $t \to \pm\infty$ $u(t) = T(t)\psi$ z warunkiem początkowym ψ za pomocą pewnych specjalnych rozwiązań $v(t) = T_0(t)\psi_\pm$, z odpowiednio dobranymi warunkami początkowymi $\psi_\pm$. Mówiąc dokładniej, staramy się dopasować rozwiązania $T_0(t)\psi_\pm$ prostszego równania do zadanego rozwiązania trudniejszego równania $T(t)\psi$ tak, aby

$$\lim_{t \to \mp\infty} \|T(t)\psi - T_0(t)\psi_\pm\| = \lim_{t \to \mp\infty} \|T(-t)T_0(t)\psi_\pm - \psi\| = 0.$$

Jak widać, chodzi tu o zdefiniowanie *operatorów falowych* jako granic w mocnym sensie

$$\Omega^\pm(T, T_0) = \mathrm{s} - \lim_{t \to \mp\infty} T(-t)T_0(t)$$

na dostatecznie dużym zbiorze warunków początkowych ψ. *Operator (macierz) rozpraszania* $S = (\Omega^-)^{-1}\Omega^+$ określa wówczas jak przejść od ψ_+ do ψ_-. S mierzy zatem wpływ potencjału V na ewolucję $u = u(t) = T(t)\psi$ porównywaną do ewolucji $v = v(t) = T_0(t)\psi_\pm$, przy przejściu od przeszłości ($t \to -\infty$) do przyszłości ($t \to +\infty$).

12. Zadania.

Zadanie 1. Rozwiązać (używając wzorów d'Alemberta) następujące zagadnienie dla równania falowego $u_{tt} = u_{xx}$ z warunkami $u = h$, $\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} = g$ zadanymi na prostej $t = kx$ ($k > 0$, $\overline{n}$ jest wektorem normalnym do tej prostej). Zbadać przypadek $k = \pm 1$ (tzw. zagadnienie Goursata).

Zadanie 2. Rozwiązać, korzystając ze wzoru d'Alemberta, następujące zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania falowego

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{w} \quad \{(x,t) \ : \ x > 0, \ \ t > 0\}$$

$u(0,t) = 0, u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x)$ (w szczególności dla $f(x) = x\exp(-x^2)$, $g(x) = 0$).

A co będzie, gdy założyć $u_x(0,t) = 0$ zamiast warunku brzegowego $u(0,t) = 0$?

Zadanie 3. Rozwiązać metodą Fouriera zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania struny

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{w} \quad \{(x,t) \ : \ 0 < x < 1, \ \ t > 0\},$$

(i) $u(x,0) = 2x$ dla $0 < x < 1/2$, $u(x,0) = 2(1-x)$ dla $1/2 < x < 1$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$;
(ii) $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ dla $0 < x < a$ i dla $b < x < 1$, $u_t(x,0) = 1$ dla $a \le x \le b$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.
Czy otrzymane szeregi Fouriera można dwukrotnie różniczkować?

Zadanie 4. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego w $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, z warunkami początkowymi $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$ dla $|x| \le 1$, $u_t(x,0) = 0$ dla $|x| > 1$.
Porównać wyniki i zinterpretować zasadę Huygensa na powyższych przykładach.

Zadanie 5. Ekwipartycja energii. Jeżeli $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania struny $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, z gładkimi warunkami początkowymi f, g o zwartych nośnikach, to funkcje energii potencjalnej i kinetycznej

$$p(t) = \frac{1}{2}\int u_x^2(x,t)\,dx \quad \text{i} \quad k(t) = \frac{1}{2}\int u_t^2(x,t)\,dx$$

są poprawnie określone. Pokazać, że $E(t) = k(t) + p(t)$ nie zależy od t, oraz $k(t) = p(t)$ dla wszystkich dostatecznie dużych t.

Zadanie 6. Sprawdzić, że szereg

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\Delta^k f(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \Delta^k g(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

formalnie spełnia równanie falowe $u_{tt} = \Delta u$ z warunkami $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Podać (przykładowo) dla jakich klas funkcji f i g powyższy szereg przedstawia faktycznie rozwiązanie. A czy szereg ten ma sens dla $f, g \in C_c^\infty(I\!R^n)$? Wsk. porównać z zasadą Huygensa.

Zadanie 7. Udowodnić, że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania falowego $u_{tt} = \Delta u$ w $I\!R^3 \times I\!R$ z warunkami $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $f, g \in C_c^\infty(I\!R^3)$, spełnia oszacowanie $|u(x,t)| \le C/t$, $t > 0$, dla pewnej stałej $C > 0$.

Zadanie 8. Jeżeli u jest funkcją harmoniczną w $I\!R^3$ (tzn. $u \in C^2$, $\Delta u = 0$), to spełnia sferyczną własność średniej

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(x,r)} u(y)\, d\sigma(y).$$

Udowodnić to korzystając ze wzoru Kirchhoffa dla rozwiązań równania falowego (niezależnych od t).

Zadanie 9. $U \subset I\!R^3$ jest ograniczonym zbiorem otwartym z gładkim brzegiem. Pokazać, że zagadnienie Cauchy'ego

$$u_{tt} - \Delta u = h \quad \text{wewnątrz } U_T = U \times (0,T],$$

$$u = f \text{ na } \Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T, \quad u_t = g \text{ na } U \times \{t = 0\},$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Wsk. Rozważyć całkę energii $E(t) = \frac{1}{2} \int_U (w_t + |\nabla_x w|^2)\, dx$ dla różnicy w dwóch rozwiązań.

Zadanie 10. Udowodnić, że jeżeli $f \in C^{2+\alpha}(I\!R^2)$, $g \in C^{1+\alpha}(I\!R^2)$ dla pewnego $\alpha > 1/2$, to istnieje klasyczne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Zadanie 11. Pokazać, że składowe (pola elektromagnetycznego) $u = E_j$, $u = B_j$, $j = 1,2,3$, rozwiązań równań Maxwella w obszarach $I\!R^3 \times I\!R$

$$E_t = \mathrm{rot}\, B, \quad B_t = -\mathrm{rot}\, E, \quad \mathrm{div}\, B = \mathrm{div}\, E = 0$$

spełniają równanie falowe $u_{tt} = \Delta u$.

Oprócz tych zadań, wiele innych można znaleźć w cytowanych podręcznikach, por. też [1].

Literatura

[1] P. Biler, T. Nadzieja, *Problems and Examples in Differential Equations*, M. Dekker, New York, 1992.

[2] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II (*Partial Differential Equations*), Interscience, New York, 1962.

[3] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, RI, 1998. Przekład polski: PWN, Warszawa, 2002.

[4] S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, John Wiley, New York, 1982.

[5] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[6] P. Garabedian, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[7] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego I, II*, PWN, Warszawa, 1957, 1962.

[8] H. Marcinkowska, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, wyd. drugie, PWN, Warszawa, 1986.

[9] H. Marcinkowska, *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa, 1993.

[10] V. P. Mikhailov, *Differencialnye uravnenia v častnych proizvodnych*, Nauka, Moskva, 1983.

[11] S. G. Mikhlin, *Linejnye uravnenia v častnych proizvodnych*, Vysšaia škola, Moskva, 1977.

[12] A. Pelczar, J. Szarski, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych, część I*, PWN, Warszawa, 1987.

[13] J. Shatah, M. Struwe, *Geometric Wave Equations*, CIMS, AMS, New York, NY, Providence, RI, 1998.