Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 16 (16/2015)
Piątek, 17 lipca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **135** i **136** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

135. Zapisz liczbę 888 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

136. Zapisz liczbę 29 używając cyfr 1, 3 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

137. Zapisz liczbę 60^{60} w postaci a^{b^c}, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi większymi od 1.

Która liczba jest większa?

138. $\frac{33}{40}$ czy $\frac{22}{27}$? **139.** $\frac{5}{16}$ czy $\frac{8}{27}$? **140.** $\frac{14}{25}$ czy $\frac{19}{33}$?

141. $\sqrt{110}-10$ czy $\frac{1234}{2467}$? **142.** $11-\sqrt{110}$ czy $\frac{1234}{2469}$?

143. $2^{2^{10}}$ czy 16^{16^2} ? **144.** 2^{2^9} czy 9^{9^2} ? **145.** $\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)^{25}$ czy $\left(\sqrt{19}-4\right)^{49}$?

146. $\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}$ czy 2 ? **147.** a^{256} czy 256^a ? Przyjmujemy $a=\sqrt[16]{2}$.

Rozwiązania zadań 122–134

122. $335=\frac{8!}{5!}-1$ **123.** $990=\frac{\left(\sqrt{5!+1}\right)!}{8!}$ **124.** $31=\sqrt{5!\cdot 8+1}$

125. *Odpowiedź:* Na 11 sposobów.
Mamy bowiem

$$36^{36}=6^{72}=\left(6^{72/b}\right)^b ,$$

gdzie za b możemy przyjąć dowolny dzielnik liczby 72 większy od 1. Ponieważ liczba 72 ma 12 dzielników, ma ona 11 dzielników większych od 1, co prowadzi do 11 przedstawień liczby 36^{36} w postaci a^b.

126. *Odpowiedź:* $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}>\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}>x^{2015}$ dla $x>1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{17}}>7-\sqrt{25}=7-5=2>\mathbf{1}\,.$$

127. *Odpowiedź:* $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}<\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}<x^{2015}$ dla $0<x<1$ oraz z oszacowań

$$\mathbf{0}=7-7=7-\sqrt{49}<\mathbf{7-\sqrt{37}}<7-\sqrt{36}=7-6=\mathbf{1}\,.$$

128. *Odpowiedź:* $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}>\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}>x^{2015}$ dla $-1<x<0$ oraz z oszacowań

$$\mathbf{-1}=7-8=7-\sqrt{64}<\mathbf{7-\sqrt{57}}<7-\sqrt{49}=7-7=\mathbf{0}\,.$$

129. *Odpowiedź:* $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}<\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}<x^{2015}$ dla $x<-1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{77}}<7-\sqrt{64}=7-8=\mathbf{-1}\,.$$

130. *Odpowiedź:* $2^{2^5}=4^{4^2}$.
Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $4^{4^2}=4^{16}=\left(2^2\right)^{16}=2^{32}=2^{2^5}$.

Jako wnioski z udowodnionej równości otrzymujemy nierówności $2^{2^n}<n^{n^2}$ dla $n=4$ i $n=5$, mamy bowiem

$$2^{2^4}<2^{2^5}=4^{4^2}\quad \text{oraz}\quad 2^{2^5}=4^{4^2}<5^{5^2}\,.$$

131. *Odpowiedź:* $2^{2^6}<6^{6^2}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$6^{6^2}=6^{36}>4^{36}=2^{72}>2^{64}=2^{2^6}\,.$$

Uwaga: W połączeniu z poprzednim zadaniem mamy więc $2^{2^n}<n^{n^2}$ dla $n=4$, 5, 6. Nierówność ta jest także prawdziwa dla $n=3$, gdyż $2^{2^3}=2^8<3^9=3^{3^2}$.

132. *Odpowiedź:* $\left(2-\sqrt{3}\right)^{21}<\left(3-\sqrt{7}\right)^{20}$.
Dla dowodu wystarczy skorzystać ze wzoru na różnicę kwadratów i zauważyć, że

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{21}=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{21}<\left(\frac{1}{2+1}\right)^{21}=\frac{1}{3^{21}}$$

oraz

$$\left(3-\sqrt{7}\right)^{20}=\left(\frac{2}{3+\sqrt{7}}\right)^{20}>\left(\frac{2}{3+3}\right)^{20}=\frac{1}{3^{20}}>\frac{1}{3^{21}}\,.$$

133. *Odpowiedź:* $(10^{12})!>10^{10^{13}}$.
W iloczynie tworzącym $(10^{12})!$ jest $9\cdot 10^{11}$ czynników większych od 10^{11} oraz $9\cdot 10^{10}$ innych czynników większych od 10^{10}. Zatem

$$\left(10^{12}\right)!>\left(10^{11}\right)^{9\cdot 10^{11}}\cdot\left(10^{10}\right)^{9\cdot 10^{10}}=10^{11\cdot 9\cdot 10^{11}}\cdot 10^{10\cdot 9\cdot 10^{10}}=10^{99\cdot 10^{11}}\cdot 10^{9\cdot 10^{11}}=$$
$$=10^{(99+9)\cdot 10^{11}}=10^{108\cdot 10^{11}}>10^{100\cdot 10^{11}}=10^{10^{13}}\,.$$

134. *Odpowiedź:* $(10^{11})!>10^{10^{12}}$.
Dowód tej nierówności wymaga nieco subtelniejszych oszacowań niż w przypadku podobnych nierówności dowodzonych poprzednio. Zauważmy, że w iloczynie tworzącym $(10^{11})!$ jest $6\cdot 10^{10}$ czynników większych od $4\cdot 10^{10}$, $3\cdot 10^{10}$ innych czynników większych od 10^{10} oraz $9\cdot 10^9$ jeszcze innych czynników większych od 10^9. Stąd otrzymujemy nierówności

$$\left(10^{11}\right)!>\left(4\cdot 10^{10}\right)^{6\cdot 10^{10}}\cdot\left(10^{10}\right)^{3\cdot 10^{10}}\cdot\left(10^{9}\right)^{9\cdot 10^{9}}=4^{6\cdot 10^{10}}\cdot\left(10^{10}\right)^{6\cdot 10^{10}}\cdot\left(10^{10}\right)^{3\cdot 10^{10}}\cdot\left(10^{9}\right)^{9\cdot 10^{9}}=$$
$$=2^{12\cdot 10^{10}}\cdot 10^{6\cdot 10^{11}}\cdot 10^{3\cdot 10^{11}}\cdot 10^{81\cdot 10^{9}}=\left(2^{10}\right)^{12\cdot 10^9}\cdot 10^{981\cdot 10^9}=1024^{12\cdot 10^9}\cdot 10^{981\cdot 10^9}>$$
$$>\left(10^{3}\right)^{12\cdot 10^9}\cdot 10^{981\cdot 10^9}=10^{36\cdot 10^9}\cdot 10^{981\cdot 10^9}=10^{1017\cdot 10^9}>10^{1000\cdot 10^9}=10^{10^{12}}\,.$$