Rozdział IV

Szeregi liczbowe.

§1. Podstawowe własności szeregów.

♡ ♡ ♡

1. Szereg nieskończony i jego suma. Z aksjomatów określających zbiór $\mathbb{R}$ (rozdz. I §1) wynika, że dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych a_1, a_2 określona jest ich suma $a_1 + a_2$. Przypuśćmy teraz, że mamy dodać do siebie n_0 liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$. Możemy to zrobić przy pomocy skończonej liczby kroków tworząc następujące sumy:

$$\text{krok (1):}\quad S_2 = a_1 + a_2 = \sum_{n=1}^{2} a_n,$$

$$\text{krok (2):}\quad S_3 = S_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{n=1}^{3} a_n$$

(zgodnie z aksjomatem łączności (2a) wynik dodawania nie zależy od sposobu w jaki pogrupowaliśmy składniki, możemy więc opuścić nawiasy),

$$\text{krok (3):}\quad S_4 = S_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{n=1}^{4} a_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}\text{krok } (n_0 - 1):\quad S_{n_0} &= S_{n_0-1} + a_{n_0} = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} a_n.\end{aligned}$$

Ostateczny, szukany przez nas wynik dodawania przedstawia ostatnia suma S_{n_0}.

Powstaje pytanie, czy można opisane postępowanie przenieść na przypadek, gdy chcemy dodać nieskończenie wiele liczb tworzących ciąg $\{a_n\}$ to znaczy utworzyć sumę

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Sumy

$$S_k = a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

tworzą teraz ciąg nieskończony. Oczywiście nie ma w tym ciągu wyrazu ostatniego, możemy jednak badać, czy ma on skończoną granicę. W przypadku zbieżności przyjmując

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S \in \mathbb{R} \tag{3}$$

umówimy się, że liczba S stanowi wynik naszego nieskończonego dodawania czyli, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \tag{4}$$

Wyrażenie (1) nazywamy *szeregiem nieskończonym* o *wyrazie ogólnym* a_n, suma S_k określona wzorem (2) jest k*-tą sumą częściową* szeregu (1) - dla wygody przyjmiemy dodatkowo

$$S_1 = a_1. \tag{2'}$$

Jeżeli istnieje granica (3), to mówimy, że szereg (1) jest *zbieżny.* Wzór (3) określa *sumę szeregu zbieżnego.* Jeżeli granica (3) nie istnieje - co oznacza, że ciąg $\{S_k\}$ nie ma granicy lub ma granicę niewłaściwą, to mówimy, że szereg jest *rozbieżny.* Jeżeli w szczególności

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \infty \qquad (\text{lub} \quad -\infty),$$

to mówimy że szereg (1) jest rozbieżny do ∞ (lub do $-\infty$).

Uwaga. Czasami wygodnie jest określić wyraz a_0 i rozważać ciąg sum częściowych w postaci

$$\begin{aligned} &S_0 = a_0, \\ &S_1 = a_0 + a_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k. \end{aligned}$$

Zakładając, że istnieje granica (3) przyjmujemy wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Przykład 1. Niech

$$a_n = q^n \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

wówczas

$$S_k = 1 + q + \cdots + q^k.$$

Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + \cdots + q^n + \cdots$$

nazywamy *szeregiem geometrycznym o ilorazie* q. Zbadamy jego zbieżność.

Dla $q \neq 1$ mamy

$$S_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \tag{5}$$

- słuszność wzoru (5) sprawdzamy łatwo mnożąc obie strony przez mianownik $1 - q$.

(i) Jeżeli $|q| < 1$, to (por. Przykład 4 rozdz.II §1)

$$\lim_{k \to \infty} q^k = 0 \tag{6}$$

zatem z (5) wynika

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \frac{1}{1 - q}.$$

Szereg geometryczny jest w tym przypadku zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad (|q| < 1). \tag{7}$$

(ii) Jeżeli $q > 1$, to

$$0 < p = \frac{1}{q} < 1,$$

zatem zgodnie z (6)

$$\lim_{k \to \infty} p^k = 0,$$

a stąd

$$\lim_{k \to \infty} q^k = \infty$$

i wobec (5)

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \infty.$$

W tym przypadku szereg geometryczny jest rozbieżny.

(iii) Jeżeli $q < -1$, to rozumując podobnie jak w punkcie (ii) stwierdzamy, że

$$\lim_{k \to \infty} q^{2k} = \infty, \qquad \lim_{k \to \infty} q^{2k+1} = -\infty$$

i wobec tego

$$\lim_{k \to \infty} S_{2k} = \infty, \qquad \lim_{k \to \infty} S_{2k+1} = -\infty.$$

Ciąg $\{S_k\}$ nie ma granicy (nawet niewłaściwej), gdyż zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Zatem szereg geometryczny jest i w tym przypadku rozbieżny.

(iv) Jeżeli $q = 1$, to

$$S_k = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(k+1)\text{ razy}} = k + 1$$

a więc

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \infty.$$

Gdy $q = -1$, to jak łatwo sprawdzić

$$S_{2k} = 1, \qquad S_{2k+1} = 0$$

zatem granica (3) nie istnieje, bo ciąg $\{S_k\}$ ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic. W obu przypadkach szereg geometryczny jest rozbieżny.

Przykład 2. Zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{8}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

więc

$$S_k = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

skąd po redukcji

$$S_k = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Wobec tego

$$\lim_{k\to\infty} S_k = 1,$$

zatem szereg (8) jest zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. Niektóre działania na szeregach. Przypuśćmy, że mamy dane dwa szeregi

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (\beta) \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Oznaczając k-tą sumę szeregu (α), (β) odpowiednio przez S_k, T_k mamy

$$S_k = B + T_k \qquad (B = b_1 + b_2 + \cdots + b_p).$$

Z twierdzenia o granicy sumy ciągów wynika, że ciąg $\{S_k\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy, zbieżny jest ciąg $\{T_k\}$. Zachodzi zatem

Twierdzenie 1. *Dopisanie do szeregu lub skreślenie w szeregu skończonej ilości wyrazów nie wpływa na jego zbieżność.*

Równie łatwo można udowodnić

Twierdzenie 2. *Jeżeli szeregi*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są zbieżne, to zbieżny jest szereg

$$(\gamma) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Jeżeli oznaczymy przez A, B, C sumy szeregów $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ odpowiednio, to zachodzi równość

$$A + B = C$$

co można zapisać inaczej

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli szereg*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to zbieżny jest szereg

$$(\delta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n$$

dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$. Jeżeli sumy szeregów $(\alpha), (\delta)$ oznaczyć odpowiednio przez A, D to zachodzi równość

$$D = cA,$$

czyli w innym zapisie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dowody obu twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi.

Załóżmy, że szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny. Z twierdzenia 1 wynika, że zbieżny jest również szereg nieskończony

$$r_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

przy dowolnie ustalonym $k \in \mathbb{N}$. Szereg ten nazywamy *k-tą resztą szeregu* (α).

Twierdzenie 4. *Jeżeli szereg* (α) *jest zbieżny, to*

$$\lim_{k\to\infty} r_k = 0. \tag{9}$$

DOWÓD. Oznaczając przez A sumę szeregu (α) i przez S_k jego k-tą sumę częściową mamy dla każdego k

$$A = S_{k-1} + r_k.$$

Ponieważ na mocy definicji sumy szeregu

$$\lim_{k\to\infty} S_k = A$$

z twierdzenia o granicy różnicy ciągów dostajemy (9). □

Zakładając, że szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

jest zbieżny, utwórzmy nowy szereg

$$(\bar{\alpha}) \quad (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \cdots$$

i niech S_k będzie k-tą sumą częściową szeregu (α). Ciąg sum częściowych szeregu $(\bar{\alpha})$ ma postać

$$S_2, S_4, \ldots, S_{2n}, \ldots$$

jest więc podciągiem ciągu $\{S_k\}$ i jako taki jest jest zbieżny do tej samej granicy, będącej sumą szeregu (α). Podobne rozumowanie można przeprowadzić łącząc w nawiasy wyrazy szeregu (α) w dowolny inny sposób. Dochodzimy w ten sposób do twierdzenia

Twierdzenie 5. *W szeregu zbieżnym można łączyć wyrazy nawiasami nie zmieniając jego sumy.*

□

Przykład 3. Szereg o wyrazie ogólnym

$$a_n = (-1)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

można zapisać w postaci

$$(\beta) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Oznaczając przez S_k jego k-tą sumę częściową mamy

$$S_{2k-1} = 1, \qquad S_{2k} = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

skąd widać, że ciąg $\{S_k\}$ nie może być zbieżny gdyż zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Wobec tego szereg (β) jest rozbieżny. Natomiast łącząc w nawias po dwa kolejne jego wyrazy dostajemy szereg zbieżny

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots$$

Twierdzenie 5 uogólnia zasadę łączności dodawania (aksjomat (2a) rozdz. I §1) na przypadek dodawania nieskończonego. Jak widać z przykładu 3 zasada ta jest słuszna jedynie w odniesieniu do szeregów zbieżnych.

3. Warunek Cauchy'ego. Z twierdzenia 6 rozdz. II §2 zastosowanego do ciągu sum częściowych $\{S_k\}$ wynika natychmiast

Twierdzenie 6. *Szereg*

$$(\alpha) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ *można dobrać liczbę* N *tak, że dla* $n > N$ *i dla dowolnego* $p \in \mathbb{N}$ *zachodzi nierówność*

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon. \tag{10}$$

□

Wyrażenie

$$a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$$

nazywamy *odcinkiem szeregu* (α). Warunek podany w twierdzeniu 6 nosi nazwę *warunku Cauchy'ego dla szeregów.* W sposób mniej precyzyjny można twierdzenie 6 sformułować następująco:

Twierdzenie 6'. *Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego dostatecznie dalekie odcinki są bezwzględnie mniejsze od dowolnie obranej liczby dodatniej* ε.

Przykład 4. Szereg *harmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, mamy bowiem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

zatem warunek Cauchy'ego podany w twierdzeniu 6 nie jest spełniony przy $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Przykład 5. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest również rozbieżny, gdyż

$$S_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k},$$

a więc

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \infty.$$

Z twierdzenia 6 łatwo wyprowadzić

Twierdzenie 7 (kryterium porównawcze zbieżności). *Jeżeli dla* $n \geq n_0$ *(gdzie* $n_0 \in \mathbb{N}$*) zachodzi nierówność*

$$|a_n| \leq b_n \tag{11}$$

i szereg

$$(\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest zbieżny, to również szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny.

DOWÓD. Z twierdzenia 6 wynika, że szereg (β) spełnia warunek Cauchy'ego, co oznacza, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ i dowolnego $p \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon. \tag{12}$$

Ponieważ na mocy (11) dla $n \geq n_0$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}$$

z nierówności (12) wynika, że również szereg (α) spełnia warunek Cauchy'ego, co zgodnie z twierdzeniem 6 zapewnia jego zbieżność. □

Przykład 6. Okazaliśmy (Przykład 2), że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

jest zbieżny. Ponieważ dla $n \geq 2$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest również zbieżny na mocy twierdzenia 7.

Przykład 7. Przy dowolnie obranym x szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

jest zbieżny na mocy twierdzenia 7, gdyż

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2} < 1$ (por. Przykład 1).

Przykład 8. Zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt[n]{3}}{3^n}. \tag{13}$$

Ponieważ (por. Przykład 13 rozdz.II §1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1,$$

istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{3} < 2,$$

wobec tego

$$\frac{2\sqrt[n]{3}}{3^n} < \frac{4}{3^n} \tag{14}$$

dla $n \geq n_0$. Ponieważ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ (Przykład 1), na mocy twierdzenia 3 zbieżny jest również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

a stąd w oparciu o nierówność (14) i twierdzenie 7 wynika zbieżność szeregu (13).

Opierając się na twierdzeniu 6 dostajemy warunek konieczny zbieżności szeregu.

Twierdzenie 8. *Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{15}$$

DOWÓD. Wystarczy przyjąć $p = 1$ w nierówności (10). □

Z Przykładu 4 widać, że warunek (15) jest jedynie warunkiem koniecznym ale nie dostatecznym zbieżności szeregu. Mamy bowiem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ale szereg harmoniczny jest rozbieżny.

4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej jako szereg. W praktycznych rachunkach mamy zazwyczaj do czynienia z liczbami zapisanymi w postaci rozwinięć dziesiętnych, które możemy inaczej przedstawić jako sumę potęg liczby 10 z odpowiednimi współczynnikami. Dla przykładu

$$0,351 = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{1}{10^3}, \tag{16}$$

$$273 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0. \tag{17}$$

Oczywiście nie wszystkie liczby rzeczywiste mają skończone rozwinięcia dziesiętne. Na przykład zamieniając $\frac{1}{3}$ na ułamek dziesiętny otrzymujemy rozwinięcie nieskończone w którym wszystkie cyfry są równe 3, czyli

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots. \tag{18}$$

Nasuwa się myśl, by przez analogię ze wzorem (16) traktować prawą stronę (18) jako sumę szeregu nieskończonego postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}, \tag{19}$$

powstają jednak pytania

a.) czy szereg (19) jest zbieżny (tylko wtedy nieskończone dodawanie ma sens liczbowy), oraz

b.) czy jego suma jest równa $\frac{1}{3}$?

Zauważmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \tag{20}$$

jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{10}$, jest zatem zbieżny (por. Przykład 1) i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1}{9}. \tag{21}$$

Zgodnie z twierdzeniem szereg (19) jest również zbieżny i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź na oba pytania jest więc pozytywna. Ogólnie, oznaczając n-tą cyfrę ułamka dziesiętnego przez c_n przyjmiemy, że

$$0, c_1c_2 \ldots c_n \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} \tag{22}$$

(w przypadku ułamka dziesiętnego skończonego mamy $c_n = 0$ począwszy od pewnego $n = n_0$). Ponieważ $0 \leq c_n \leq 9$, dla ogólnego wyrazu szeregu po prawej stronie (22) mamy oszacowanie

$$|\frac{c_n}{10^n}| \leq \frac{9}{10^n}. \tag{23}$$

Jak zauważyliśmy przed chwilą, szereg (20) jest zbieżny, wobec tego zgodnie z twierdzeniem 3 szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

również jest zbieżny. Na podstawie kryterium porównawczego (twierdzenie 6) z nierówności (23) wynika zbieżność szeregu po prawej stronie (22).

Zapis (22) można uogólnić na przypadek dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$. Zakładając, że $[x]$ ma rozwinięcie dziesiętne postaci

$$[x] = a_l a_{l-1} \ldots a_0 = \sum_{j=0}^{l} a_j 10^j \tag{24}$$

(por. (17)) mamy

$$x = \sum_{j=0}^{l} a_j 10^j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}.$$

Przykład 9. Wiemy, że

$$1 = 1,000 \ldots.$$

Okażemy, że również

$$1 = 0,999\ldots \tag{25}$$

Zadanie można rozwiązać dwoma sposobami.
(i) Oznaczając przez x prawą stronę (25) mamy zgodnie z przyjętą umową

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

a więc w oparciu o twierdzenie 3 i równość (21)

$$x = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

(ii) Zgodnie z wprowadzonym oznaczeniem mamy

$$x = 0,999\ldots$$

a stąd

$$10x = 9,999\ldots$$

czyli

$$10x = 9 + x$$

co po redukcji daje $x = 1$. □

Przykład 9 wskazuje, że pewne liczby mogą mieć dwa różne rozwinięcia dziesiętne.
♡ ♡ ♡

5*. Rozwinięcie liczby naturalnej przy dowolnej podstawie. Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną. Oprócz rozwinięcia dziesiętnego liczby m postaci (24) możemy rozważać rozwinięcie tej liczby przy dowolnej podstawie p $\quad (p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$ postaci

$$m = \sum_{j=0}^{k} a_j p^j \quad (a_j \in 0, 1, \ldots, p-1; a_k \neq 0). \tag{26}$$

Rozwinięcie to zapisujemy symbolicznie

$$m = a_k a_{k-1} \ldots a_0 \ (p)$$

opuszczając indeks p w przypadku rozwinięcia dziesiętnego. Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_k$ nazywamy *cyframi rozwinięcia* (26).

Twierdzenie 9. *Cyfry rozwinięcia* (26) *są określone jednoznacznie przez liczby* m, p.

DOWÓD. Niech

$$t_r = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^r} \qquad (r \in \mathbb{N}).$$

Stosując znany wzór (por. (17) rozdz.II §2)

$$1 + q + \cdots + q^r = \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

mamy podstawiając $q = \frac{1}{p}$

$$t_r < \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1}{p-1}. \tag{27}$$

Dzieląc obie strony (26) przez p^k dostajemy

$$\frac{m}{p^k} = a_k + s_k, \tag{28}$$

gdzie

$$0 \le s_k = \sum_{j=0}^{k-1} a_j p^{j-k} \le (p-1)t_k.$$

Na mocy (27)

$$0 \le s_k < 1,$$

a zatem z (28) wynika

$$a_k = [\frac{m}{p^k}], \tag{29}$$

co oznacza, że pierwsza cyfra rozwinięcia a_k jest określona jednoznacznie wzorem (29). Przyjmując

$$m_k = m - a_k p^k \tag{30}$$

dostajemy z (26)

$$\frac{m_k}{p^{k-1}} = a_{k-1} + s_{k-1}, \tag{31}$$

gdzie

$$0 \le s_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-2} a_j p^{j-(k-1)} \le (p-1)t_{k-1}$$

a stąd wobec (27)

$$0 \leq s_{k-1} < 1$$

a więc zgodnie z (31)

(32) $$a_{k-1} = [\frac{m_k}{p^{k-1}}]$$

przy czym liczba m_k jest określona wzorem (30). Zatem druga cyfra rozwinięcia a_{k-1} jest również określona jednoznacznie wzorem (32). Kontynuując opisane rozumowanie dostajemy

(33) $$a_{j-1} = [\frac{m_j}{p^{j-1}}] \qquad (j = k+1, k, \ldots, 1; \quad m = m_{k+1})$$

gdzie

(34) $$m_j = m - (a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_j p^j),$$

przy czym cyfry rozwinięcia $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_j$ zostały już poprzednio określone jednoznacznie przez liczby m, p. □

Aby znaleźć rozwinięcie (26) danej liczby m zauważmy, że

$$\lim_{n \to \infty} p^n = \infty,$$

istnieje wobec tego liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że dla $n \geq N$ szachodzi nierówność

$$m < p^n.$$

Oznaczając przez n_0 najmniejszą liczbę N o tej własności i przyjmując $n_0 = k+1$ mamy

(35) $$p^k \leq m < p^{k+1}$$

a stąd

$$1 \leq \frac{m}{p^k} < p.$$

Przyjmując

$$a_k = [\frac{m}{p^k}]$$

otrzymujemy pierwszą cyfrę rozwinięcia (26), przy czym liczba k jest wyzmaczona jednoznacznie przez oszacowanie (35). Dalsze cyfry obliczamy stosując kolejno wzory (33), (34). Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie, że przy tak określonych liczbach $a_0, a_1, \ldots, a_k$ równość (26) jest spełniona.

Przykład 10. Niech

$$p = 2, \qquad m = 23.$$

Kolejne potęgi liczby p wynoszą

$$2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32.$$

Ponieważ

$$16 < 23 < 32$$

mamy $k = 4$, zatem w rozwinięciu dwójkowym liczby 23 występuje 5 cyfr. Stosując opisane poprzednio postępowanie dostajemy

$$\begin{array}{ll}
\text{(krok 1)} & \dfrac{23}{16} = 1 + \dfrac{7}{16}, \quad 23 = 1 \cdot 2^4 + 7, \\
\text{(krok 2)} & \dfrac{7}{8} = 0 + \dfrac{7}{8}, \quad 7 = 0 + 7, \quad 23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 7, \\
\text{(krok 3)} & \dfrac{7}{4} = 1 + \dfrac{3}{4}, \quad 7 = 1 \cdot 2^2 + 3, \quad 23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 3, \\
\text{(krok 4)} & \dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}, \quad 3 = 1 \cdot 2 + 1,
\end{array}$$

$$23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1. \tag{35}$$

Równość (35) daje szukane rozwinięcie liczby 23 przy podstawie $p = 2$, które możemy zapisać inaczej

$$23 = 10111\ (2)$$

Przykład 11. Niech

$$p = 5, \quad m = 72.$$

Kolejne potęgi liczby p wynoszą

$$5, \quad 5^2 = 25, \quad 5^3 = 125.$$

Ponieważ

$$25 < 72 < 125,$$

mamy $k = 2$, zatem w rozwinięciu występują 3 cyfry. Dostajemy kolejno

$$\begin{array}{ll}
\text{(krok 1)} & \dfrac{72}{25} = 2 + \dfrac{22}{25}, \quad 72 = 2 \cdot 5^2 + 22, \\
\text{(krok 2)} & \dfrac{22}{5} = 4 + \dfrac{2}{5}, 22 = 4 \cdot 5 + 2,
\end{array}$$

$$72 = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2. \tag{36}$$

Równość (36) daje szukane rozwinięcie liczby 72 przy podstawie $p = 5$, w innym zapisie

$$72 = 242\ (5).$$

6*. Rozwinięcie liczby rzeczywistej dodatniej przy dowolnej podstawie. Niech $\alpha > 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Przez *rozwinięcie liczby α przy podstawie p* ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) rozumiemy przedstawienie jej w postaci sumy

(37) $$\alpha = c_{-k}p^k + \cdots + c_{-1}p + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}$$

gdzie c_n $(n \in -k, \dots, -1, 0 \cup \mathbb{N})$ są liczbami całkowitymi spełniającymi warunek

(38) $$0 \leq c_n \leq p - 1.$$

Równość (37) zapisujemy symbolicznie

$$\alpha = c_{-k}c_{-k+1} \dots c_{-1}c_0, c_1c_2 \dots c_n \dots \ (p)$$

opuszczając indeks p w przypadku $p = 10$. Rozwinięcie (37) nazywamy

właściwym, jeżeli

$$c_n < p - 1$$

dla nieskończenie wielu n,

niewłaściwym, jeżeli zachodzi sytuacja przeciwna tzn. jeżeli istnieje takie n_0, że

$$c_n = p - 1$$

dla $n \geq n_0$.

Twierdzenie 10. *Dowolna liczba rzeczywista $\alpha > 0$ ma jednoznacznie określone rozwinięcie właściwe* (37), *przy czym*

(39) $$c_n = [p^n\alpha] - p[p^{n-1}\alpha] \quad (n \in \{-k, \dots, -1, 0\} \cup \mathbb{N}).$$

DOWÓD. Dowód zaczniemy od przypadku, gdy $\alpha \in (0, 1)$. W rozwinięciu (37) mogą wówczas występować jedynie ujemne potęgi podstawy p, inaczej mówiąc musi być

$$c_{-k} = c_{-k+1} = \cdots = c_{-1} = c_0 = 0.$$

Gdyby bowiem było $c_{-j} \neq 0$ dla pewnego $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, to z (37) wynikałoby

$$\alpha \geq c_{-j}p^j \geq 1$$

wbrew założeniu. Wobec tego szukane rozwinięcie liczby α ma postać

(37') $$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}.$$

Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (7) dla $q = \frac{1}{p}$

(40) $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}$$

a stąd wynika natychmiast

Lemat 1. *Dla dowolnych* $0 \leq d_n \leq p-1$ *zachodzi nierówność*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} \leq 1 \tag{41}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$d_n = p-1 \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

DOWÓD LEMATU. Załóżmy, że warunek (42) nie jest spełniony, istnieje zatem takie $k \in \mathbb{N}$, że

$$d_k < p-1.$$

W oparciu o (40) dostajemy wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} &= \frac{d_k}{p^k} + \sum_{n=1, n\neq k}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} < \frac{p-1}{p^k} + \sum_{n=1, n\neq k}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} \\ &\leq (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = 1\end{aligned}$$

co oznacza, że w (41) mamy nierówność ostrą $<$. □

Udowodnimy jeszcze

Lemat 2. *Załóżmy, że* d_n $(n \in \mathbb{N})$ *są liczbami całkowitymi spełniającymi warunek*

$$0 \leq d_n \leq p-1,$$

przy czym nierówność ostra

$$d_n < p-1$$

spełniona jest dla nieskończenie wielu n*. Wówczas oznaczając*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} \tag{43}$$

mamy

$$d_n = [p^n x] - p[p^{n-1} x] \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{44}$$

DOWÓD LEMATU. Zbieżność szeregu po prawej stronie (43) została wykazana w dowodzie lematu 1. Dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$p^n x = p^{n-1} d_1 + p^{n-2} d_2 + \cdots + d_n + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_{n+r}}{p^r}.$$

W szeregu po prawej stronie nierówność

$$d_{n+r} < p - 1$$

zachodzi dla nieskończenie wielu r, zatem zgodnie z lematem 1 jego suma leży w przedziale $[0, 1)$. Wobec tego

$$[p^n x] = p^{n-1} d_1 + p^{n-2} d_2 + \cdots + d_n, \tag{45}$$

co po zamianie n na $n-1$ daje

$$[p^{n-1} x] = p^{n-2} d_1 + p^{n-3} d_2 + \cdots + d_{n-1}$$

a z ostatnich dwóch równości wynika (44) dla $n \geq 2$. Dla $n = 1$ mamy z (45)

$$[px] = d_1$$

zaś

$$[x] = 0,$$

gdyż na mocy lematu 1 mamy $0 \leq x < 1$. Zatem wzór (44) jest prawdziwy również dla $n = 1$. □

Z lematu 2 wynika, że jeżeli istnieje rozwinięcia właściwe (37') liczby α, to jego współczynniki c_n są określone jednoznacznie wzorami (39). Pozostaje do wykazania, że takie rozwinięcie istnieje. Zauważmy, że jeżeli liczby c_n są określone wzorami (39), to k-ta suma częściowa szeregu po prawej stronie (37') ma postać

$$S_k = \frac{[p\alpha]}{p} + \left(\frac{[p^2\alpha]}{p^2} - \frac{[p\alpha]}{p} \right) + \cdots + \left(\frac{[p^k\alpha]}{p^k} - \frac{[p^{k-1}\alpha]}{p^{k-1}} \right),$$

czyli po redukcji

$$S_k = \frac{[p^k\alpha]}{p^k}.$$

Ponieważ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 \leq x - [x] < 1,$$

więc

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Przyjmując $x = p^k\alpha$ dostajemy stąd

$$\alpha - \frac{1}{p^k} < S_k \leq \alpha, \tag{46}$$

przy czym

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} = 0.$$

Z nierówności (46) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \alpha.$$

Okazaliśmy więc, że równość (37') jest prawdziwa, jeżeli liczby c_n są określone wzorem (39). Ponadto z tożsamości

$$[x] - m = [x-m] \qquad (x \in \mathbb{R}, m \quad \text{całkowite})$$

wynika, że

$$c_n = [p^n\alpha - p[p^{n-1}\alpha]] = [p\beta] \tag{47}$$

gdzie

$$0 \le \beta = p^{n-1}\alpha - [p^{n-1}\alpha] < 1. \tag{48}$$

Z (47), (48) wynika, że liczby c_n są całkowite i spełniają warunek (38). Zatem (37') jest rozwinięciem liczby α przy podstawie p.

Pozostaje do wykazania, że jest to rozwinięcie właściwe. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieje zatem liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$c_k < p-1, \quad c_n = p-1 \quad \text{dla} \quad n > k \tag{49}$$

a zatem rozwinięcie (37') ma postać

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \cdots + \frac{c_k}{p^k} + S_k \tag{50}$$

gdzie

$$S_k = (p-1)\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{p^n}.$$

Z równości (40) dostajemy

$$S_k = \frac{p-1}{p^k}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^k},$$

równość (50) może być więc zapisana w postaci

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^k} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{p^{k-1}} + \frac{\bar{c}_k}{p^k}, \tag{51}$$

gdzie wobec (49)

$$0 \le \bar{c}_k = c_k + 1 \le p-1.$$

Rozwinięcie (51) liczby α spełnia założenia lematu 2, zatem musi być

$$\bar{c}_k = [p^k\alpha] - p[p^{k-1}\alpha],$$

a to oznacza, że

$$\bar{c}_k = c_k + 1 = c_k,$$

co daje sprzeczność.

Dowód twierdzenia jest zakończony w przypadku $\alpha \in (0,1)$. Jeżeli $\alpha \geq 1$, to podobnie jak w punkcie 5 okazujemy, że istnieje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla którego spełniona jest nierówność

$$p^k \leq \alpha < p^{k+1}. \tag{52}$$

Przyjmując

$$\beta = \frac{\alpha}{p^{k+1}} \tag{53}$$

wnioskujemy z nierówności (52), że $\beta \in (0,1)$, ma zatem rozwinięcie właściwe

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n}, \tag{54}$$

gdzie

$$b_n = [p^n\beta] - p[p^{n-1}\beta] \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{55}$$

Z (53), (54) wynika

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^{n-k-1}},$$

co można inaczej zapisać (przyjmując $n-k-1=r$) jako

$$\alpha = b_1p^k + b_2p^{k-1} + \cdots + b_kp + b_{k+1} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{b_{r+k+1}}{p^r}. \tag{56}$$

Zgodnie z (53), (55)

$$b_n = [p^{n-k-1}\alpha] - p[p^{n-k-2}\alpha] = c_r \qquad (r \in \{-k, \ldots, -1, 0\} \cup \mathbb{N})$$

gdzie liczby c_r są określone wzorami (39). Równość (56) zapisana w postaci

$$\alpha = c_{-k}p^k + \cdots + c_{-1}p + c_o + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{p^r}$$

daje szukane rozwinięcie właściwe liczby α. Dowód twierdzenia jest zakończony. $\square$.

Uwaga. W punkcie 5 podaliśmy regułę rachunkową pozwalającą obliczyć współczynniki a_j w przedstawieniu (26) liczby naturalnej m. Zauważmy, że obliczając współczynniki c_n ze wzoru (39) dla $\alpha = m$ i korzystając z przedstawienia (26) dostajemy

$$c_j = \frac{a_kp^k + \cdots + a_jp^j}{p^j} - p\frac{a_kp^k + \cdots + a_{j+1}p^{j+1}}{p^{j+1}}$$

co po uproszczeniu drugiego ułamka i redukcji daje

$$c_{-j} = a_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, k).$$

Ponadto

$$c_n = p^n m - p(p^{n-1}m) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Zatem otrzymane w punkcie 5 rozwinięcie liczby m przy podstawie p jest jej rozwinięciem właściwym, o którym mowa w twierdzeniu 10. Jak widać rozwinięcie to jest skończone i nie zawiera potęg ujemnych podstawy p.

Przechodząc do rozwinięć niewłaściwych udowodnimy

Twierdzenie 11. *Liczba rzeczywista $\alpha > 0$ ma rozwinięcie niewłaściwe wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie właściwe jest skończone.*

DOWÓD. Jak już zauważyliśmy w dowodzie twierdzenia 10, do dowolnie ustalonej liczby $\alpha \geq 1$ można dobrać liczbę $\beta \in (0, 1)$ określoną wzorem (53) (gdzie k jest wyznaczone przez nierówność (52)), przy czym rozwinięcie właściwe (względnie niewłaściwe) liczby β daje po pomnożeniu przez p^{k+1} rozwinięcie liczby α o tej samej własności. Wobec tego dowód twierdzenia możemy ograniczyć do przypadku $\alpha \in (0, 1)$.

Załóżmy, że (37') jest rozwinięciem niewłaściwym i niech r będzie największą liczbą naturalną taką, że

$$c_r < p - 1$$

(liczba taka istnieje, gdyż w przeciwnym razie z (37'), (40) wynikałoby, że $\alpha = 1$). Mamy wówczas

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \cdots + \frac{c_r}{p^r} + \frac{p-1}{p^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$$

a więc zgodnie z (40)

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \cdots + \frac{c_{r-1}}{p^{r-1}} + \frac{c_r + 1}{p^r}. \tag{57}$$

Ponieważ $c_r + 1 < p$, równość (57) daje skończone rozwinięcie właściwe liczby α. Naodwrót, opierając się na wzorze (40) możemy skończone rozwinięcie właściwe

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \cdots + \frac{c_s}{p^s} \qquad (c_s \neq 0)$$

zapisać w postaci

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \cdots + \frac{c_s - 1}{p^s} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n}. \tag{58}$$

Ponieważ $c_s - 1 \geq 0$, przedstawienie (58) daje rozwinięcie niewłaściwe liczby α. □

Powstaje pytanie, jakie liczby dodatnie mają skończone rozwinięcie właściwe. Prostą odpowiedź daje

Twierdzenie 12. *Liczba rzeczywista $\alpha > 0$ ma skończone rozwinięcie właściwe przy podstawie p wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\alpha = \frac{l}{p^r} \qquad (l \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}). \tag{59}$$

DOWÓD. Jeżeli α ma skończone rozwinięcie właściwe w którym występują ujemne potęgi p, to po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mienownika stwierdzamy, że α jest postaci (59) gdzie $r \in \mathbb{N}$. Jeżeli w rozwinięciu właściwym liczby α nie ma wyrazów z ujemnymi potęgami p, to jest ona liczbą naturalną, a więc równość (50) zachodzi przy $r = 0$.

Na odwrót, z (59) wynika, że $p^n\alpha \in \mathbb{N}$ dla $n \geq r$, zatem wzór (39) daje dla $n > r$

$$c_n = p^n\alpha - p(p^{n-1}\alpha) = 0.$$

□

Przykład 12. Niech

$$\alpha = \frac{125}{1000}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 12 liczba α ma przy podstawie $p = 10$ skończone rozwinięcie właściwe

$$\alpha = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,125. \tag{60}$$

Zgodnie ze wzorem (40)

$$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n} = \sum_{s=4}^{\infty}\frac{9}{10^s}$$

zatem z (60) otrzymujemy rozwinięcie niewłaściwe liczby α

$$\alpha = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \sum_{s=4}^{\infty}\frac{9}{10^s} = 0,124999\ldots.$$

Przykład 13. Zgodnie z twierdzeniem 12 liczba

$$\alpha = \frac{5}{8}$$

ma przy podstawie $p = 2$ skończone rozwinięcie właściwe. Ze wzorów (39) dostajemy

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_n = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 4,$$

zatem rozwinięcie właściwe ma postać

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0,101\ (2).$$

Zgodnie ze wzorem (40)

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{s=4}^{\infty} \frac{1}{2^s}$$

a więc rozwinięcie niewłaściwe ma postać

$$\alpha = \frac{1}{2} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{1}{2^s} = 0,100111\ldots\ (2).$$

Przykład 14. Zgodnie z twierdzeniem 12 liczba

$$\alpha = \frac{7}{25}$$

ma skończone rozwinięcie właściwe przy podstawie $p = 5$. Ze wzorów (39) mamy

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_n = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 3,$$

zatem

$$\alpha = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = 0,12\ (5)$$

jest rozwinięciem właściwym. Zgodnie z (40)

$$\frac{1}{5^2} = \frac{1}{5^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} = \sum_{s=3}^{\infty} \frac{4}{5^s}$$

zatem rozwinięcie niewłaściwe ma postać

$$\alpha = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{4}{5^s} = 0,1144\ldots\ (5)$$

7*. Rozwinięcia liczb wymiernych. Zaczniemy od następującego prostego lematu.

Lemat 3 (algorytm dzielenia). *Niech $p \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Dla dowolnych $l, m \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $a, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takie, że*

$$\frac{l}{m} = \frac{a}{p} + \frac{r}{pm}, \quad 0 \leq r < m. \tag{61}$$

DOWÓD. Wystarczy przyjąć

$$a = [\frac{pl}{m}], \tag{62}$$

wówczas

$$\frac{pl}{m} = a + q,$$

gdzie

$$0 \leq q = \frac{pl - am}{m} < 1.$$

Oznaczając

$$r = pl - am$$

dostajemy (61). $\square$

Uwaga. Jeżeli $l < m$, to z (62) wynika, że

$$0 \leq a \leq p - 1.$$

Liczbę r nazywamy *resztą z dzielenia* $l : m$ przy podstawie p.

Przy pomocy algorytmu dzielenia możemy otrzymać rozwinięcie przy podstawie p dowolnej liczby wymiernej z przedziału $(0, 1)$. Niech

$$w = \frac{l}{m} \qquad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N}).$$

Oznaczając $a = a_1, \quad r = r_1$ dostajemy zgodnie z lematem 3

$$w = \frac{a_1}{p} + \frac{r_1}{pm}$$

gdzie $a_1 \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}, \quad 0 \leq r_1 < m$. Stosując lemat 3 z zastąpieniem l przez r_1 dostajemy przyjmując $r = r_2$

$$\frac{r_1}{m} = \frac{a_2}{p} + \frac{r_2}{pm},$$

a stąd

$$w = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{r_2}{p^2 m},$$

gdzie również $a_2 \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}, \quad 0 \leq r_2 < m$. Opisane postępowanie możemy kontynuować przyjmując kolejno (zgodnie z lematem 3) dla $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{r_n}{m} = \frac{a_{n+1}}{p} + \frac{r_{n+1}}{pm}, \tag{63}$$

gdzie

$$a_{n+1} = [\frac{pr_n}{m}], \tag{64}$$

przy czym zachodzą nierówności

$$0 \leq a_{n+1} \leq p - 1, \qquad 0 \leq r_n, \ r_{n+1} < m. \tag{65}$$

Jeżeli $r_k = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to stosując kolejno wzory (63), (64) dostajemy $a_n = r_n = 0$ dla $n > k$. Otrzymujemy wówczas przedstawienie liczby w postaci

$$w = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_k}{p^k}.$$

Jest to oczywiście rozwinięcie właściwe liczby w przy podstawie p, z twierdzenia 10 wynika więc, że $a_j = c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$, gdzie liczby c_j są określone wzorem (39). Jeżeli przeciwnie, wszystkie reszty r_j są dodatnie, to dla dowolnie ustalonego $k \in \mathbb{N}$ mamy rozkład

$$w = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_k}{p^k} + \frac{r_k}{p^k m}. \tag{66}$$

Ponieważ

$$0 < \frac{r_k}{p^k m} < \frac{1}{p^k}$$

po przejściu do granicy w (66) przy $k \to \infty$ dostajemy rozwinięcie

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}, \tag{67}$$

gdzie współczynniki a_n są określone wzorami rekurencyjnymi (63), (64). Łatwo okazać, że (67) jest rozwinięciem właściwym. Przypuśćmy bowiem, że istnieje $q \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > q$ mamy $a_n = p - 1$. Wówczas (67) można zapisać w postaci

$$w = \sum_{n=1}^{q} \frac{a_n}{p^n} + S_q, \tag{68}$$

gdzie

$$S_q = (p-1) \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{p^n},$$

a więc wobec (40)

$$S_q = \frac{1}{p^q}. \tag{69}$$

Porównując (68), (69) z (66) dla $k = q$ dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{r_q}{p^q m} = \frac{1}{p^q},$$

co oznacza, że

$$r_q = m$$

wbrew drugiemu z warunków (65). Ponieważ rozwinięcie (67) jest rozwinięciem własciwym, z twierdzenia 10 wynika

$$a_n = c_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Doszliśmy w ten sposób do twierdzenia

Twierdzenie 13. *Jeżeli*

$$w = \frac{l}{m} \qquad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N})$$

to współczynniki c_n rozwinięcia właściwego (37') mogą być wyznaczone ze wzorów rekurencyjnych

$$\begin{aligned} r_0 = l, \quad \frac{r_n}{m} &= \frac{c_{n+1}}{p} + \frac{r_{n+1}}{pm} \\ c_{n+1} &= [\frac{pr_n}{m}] \end{aligned} \tag{70}$$

$$(n \in \mathbb{N})$$

przy czym $r_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ dla każdego n.

□

Mówimy, że rozwinięcie właściwe (37) liczby rzeczywistej $\alpha > 0$ jest *okresowe*, jeżeli istnieją liczby $s \in \{-k, \ldots, -1, 0\} \cup \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{N}$ takie, że $c_n = c_{n+t}$ dla $n \geq s$. Rozwinięcie to będziemy zapisywać w postaci

$$\alpha = c_{-k}c_{-k+1}\ldots c_{-1}c_0, c_1 \ldots c_{s-1}[c_s c_{s+1} \ldots c_{s+t-1}]\ (p)$$

opuszczając wskaźnik p, gdy $p = 10$.

Twierdzenie 14. *Niech $p \geq 2$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Liczba rzeczywista $\alpha > 0$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy ma okresowe rozwinięcie właściwe przy podstawie p.*

DOWÓD. Jeżeli $\alpha \in \mathbb{N}$ to, jak wynika z dowodu twierdzenia 12, α ma skończone rozwinięcie właściwe w którym $c_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Takie rozwinięcie jest oczywiście okresowe.

Dowolną liczbę $\alpha > 0$ nie będącą liczbą naturalną można przedstawić w postaci

$$\alpha = [\alpha] + \beta \qquad (0 < \beta < 1)$$

przy czym

1^0 α jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy β jest liczbą wymierną,

2^0 rozwinięcie właściwe liczby α jest okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy rozwinięcie właściwe liczby β ma tę własność.

Wobec tego możemy przeprowadzić dowód twierdzenia zakładając, że $\alpha \in (0, 1)$ oraz że rozwinięcie właściwe liczby α jest nieskończone.

Załóżmy, że jest to rozwinięcie okresowe. Zgodnie z twierdzeniem 5 możemy w szeregu połączyć wyrazy nawiasami otrzymując

$$\alpha = \alpha_1 + (\frac{c_s}{p^s} + \frac{c_{s+1}}{p^{s+1}} + \cdots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{s+t-1}}) + (\frac{c_s}{p^{s+t}} + \frac{c_{s+1}}{p^{s+t+1}} + \cdots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{s+2t-1}}) + \cdots \tag{71}$$

gdzie

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{s-1} \frac{c_n}{p^n}.$$

Oznaczając

$$s_j = \frac{c_s}{p^{s+jt}} + \frac{c_{s+1}}{p^{s+jt+1}} + \cdots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{s+jt+t-1}}$$

możemy (71) zapisać krócej w postaci

$$\alpha = \alpha_1 + \sum_{j=0}^{\infty} s_j. \tag{72}$$

Zauważmy, że

$$s_j = \frac{d}{p^{s+jt}}, \qquad d = c_s + \frac{c_{s+1}}{p} + \cdots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{t-1}}$$

i wobec tego z (72) dostajemy

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{d}{p^s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{jt}},$$

czyli w oparciu o wzór (7) dla $q = \frac{1}{p^t}$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{d}{p^s} \cdot \frac{p^t}{1 - p^t},$$

a to oznacza, że α jest liczbą wymierną.

Załóżmy teraz, że

$$\alpha = \frac{l}{m} \qquad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N}). \tag{73}$$

W celu otrzymania rozwinięcia możemy zastosować algorytm dzielenia, co doprowadza do wzorów rekurencyjnych (70) wiążących cyfry rozwinięcia c_n i reszty z dzielenia r_n. Ponieważ reszty te są liczbami całkowitymi przyjmującymi wartości $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, w ciągu $\{r_0, r_1, \ldots, r_m\}$ muszą występować co najmniej dwie liczby równe. Istnieją zatem liczby $s, t \in \mathbb{N}$ takie, że

$$r_s = r_{s+t} \qquad (0 \le s < s + t \le m). \tag{74}$$

Oznaczając

$$f(x) = px - m[\frac{px}{m}]$$

dostajemy ze wzorów (70)

$$r_{n+1} = f(r_n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Teraz już łatwo udowodnić metodą indukcji, że

$$r_{n+t} = r_n \quad \text{dla} \quad n \geq s. \tag{75}$$

Istotnie, dla $n = s$ równość (75) jest prawdziwa na mocy (74). Zakładając, że warunek (75) jest spełniony dla pewnego n otrzymujemy po zastąpieniu n przez $n + 1$

$$r_{n+t+1} = f(r_{n+t}) = f(r_n) = r_{n+1}$$

co kończy dowód indukcyjny. Warunek (75) zastosowany do ostatniego ze wzorów (70) daje

$$c_{n+1+t} = [\frac{pr_{n+t}}{m}] = [\frac{pr_n}{m}] = c_{n+1}$$

a to oznacza, że

$$c_{n+t} = c_n \quad \text{dla} \quad n \geq s + 1.$$

Zatem liczba α postaci (73) ma okresowe rozwinięcie właściwe przy podstawie p, co kończy dowód. $\square$

Uwaga. Wzory (70) pozwalające wyznaczyć rozwinięcie przy podstawie p liczby wymiernej

$$w = \frac{l}{m} \qquad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N})$$

można zapisać w innej (równoważnej) postaci dogodnej rachunkowo:

$$\begin{aligned} &r_0 = l, \\ &c_{n+1} = [\frac{pr_n}{m}], \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}) \\ &r_{n+1} = pr_n - mc_{n+1}. \end{aligned} \tag{70'}$$

Przykład 15. Znajdziemy rozwinięcie dziesiętne liczby

$$w = \frac{5}{7}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 14 liczba w ma rozwinięcie okresowe. Ze wzorów (70') dostajemy kolejno

$$r_0 = 5, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 2, \quad r_4 = 6, \quad r_5 = 4, \quad r_6 = 5 = r_0$$

oraz

$$c_1 = 7, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 4, \quad c_4 = 2, \quad c_5 = 8, \quad c_6 = 5, \quad c_7 = 7 = c_1$$

zatem

$$\frac{5}{7} = 0,[714285].$$

Z dowodu twierdzenia 14 wynika, że okres rozwinięcia może składać się conajwyżej z $m = 7$ cyfr. W rzeczywistości otrzymaliśmy rozwinięcie o okresie zawierającym 6 cyfr, czyli o jedną mniej niż można było przewidywać.

Przykład 16. Znajdziemy rozwinięcie przy podstawie $p = 2$ liczby

$$w = \frac{1}{3}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 14 rozwinięcie to jest okresowe o okresie zawierającym co najwyżej $m = 3$ cyfr. Ze wzorów (70') otrzymujemy kolejno

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 1 = r_0$$

oraz

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0 = c_1.$$

Zatem

$$\frac{1}{3} = 0,[01]\ (2),$$

okres składa się z 2 cyfr.

Przykład 17. Znajdziemy rozwinięcie przy podstawie $p = 3$ liczby

$$w = \frac{17}{18}.$$

Ze wzorów (70') dostajemy kolejno

$$r_0 = 17, \quad r_1 = 15, \quad r_2 = 9, \quad r_3 = 9 = r_2$$

oraz

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 1 = c_4,$$

zatem rozwinięcie ma postać

$$\frac{17}{18} = 0,22[1]\ (3).$$

Na podstawie twierdzenia 14 można było przewidywać, że okres będzie zawierał conajwyżej $m = 18$ cyfr. Okazało się, że okres ma tylko 1 cyfrę.

Przykład 18. Przedstawimy przy pomocy ułamka liczbę α, której rozwinięcie dziesiętne $(p = 10)$ ma postać

$$\alpha = 0,1[123].$$

Używając oznaczeń wprowadzonych w dowodzie twierdzenia 14 mamy

$$\alpha = \alpha_1 + \sum_{j=0}^{\infty} s_j,$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{1}{10},$$
$$s_j = \frac{1}{10^{2+3j}} + \frac{2}{10^{2+3j+1}} + \frac{3}{10^{2+3j+2}} = \frac{d}{10^{2+3j}},$$
$$d = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} = \frac{123}{100}.$$

Zatem

$$\alpha = \frac{1}{10} + \frac{d}{10^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3j}} = \frac{1}{10} + \frac{123}{10^4}\cdot\frac{10^3}{999}$$

co daje ostatecznie

$$\alpha = \frac{1122}{9990}.$$

Przykład 19. Przedstawimy przy pomocy ułamka liczbę α, której rozwinięcie przy podstawie $p = 2$ ma postać

$$\alpha = 0,110[01]\ (2).$$

W oznaczeniach użytych w dowodzie twierdzenia 14 mamy

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} = \frac{3}{4}, \qquad s_j = \frac{0}{2^{4+2j}} + \frac{1}{2^{4+2j+1}} = \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{4^j}$$

zatem

$$\alpha = \alpha_1 + \sum_{j=0}^{\infty} s_j = \frac{3}{4} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^5}\cdot\frac{4}{3}$$

czyli

$$\alpha = \frac{19}{24}.$$

Zadania.

1. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

2. Znaleźć sumy szeregów

$$\text{a.)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sqrt{2}}, \qquad \text{b.)}\quad e + e^2 + e^3 + \sum_{n=5}^{\infty} e^{-2n}$$
$$\text{c.)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} 5e^{-3n}.$$

3. Dla jakich x zbieżny jest szereg

$$\text{a.)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} \qquad \text{b.)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x^n).$$

W przypadku zbieżności znaleźć jego sumę.
Wskazówka. W punkcie b.) rozważyć przypadki 1^0 $|x| < 1$, 2^0 $x = \pm 1$, 3^0 $|x| > 1$.

4. Znaleźć wzór na k-tą sumę częściową i obliczyć sumę szeregu o wyrazie ogólnym

$$\text{a.)} \quad a_n = \frac{1}{n(n+2)}, \qquad \text{b.)} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$\text{c.)} \quad a_n = \log(1 - \frac{1}{n^2}) \qquad (n \geq 2).$$

5. Podać wzór określający ogólny wyraz każdego z podanych szeregów:

$$\text{a.)} \quad \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \cdots$$

$$\text{b.)} \quad \frac{6}{1} + \frac{7}{3} + \frac{8}{5} + \frac{9}{7} + \frac{10}{9} + \cdots$$

$$\text{c.)} \quad \log\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 7} + \log\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10} + \log\frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 13} + \log\frac{5 \cdot 13}{4 \cdot 16} + \cdots$$

Które z tych szeregów są zbieżne? W przypadku zbieżności znaleźć sumę szeregu, badając ciąg sum częściowych.

6. Udowodnić następujące

Kryterium porównawcze rozbieżności. *Jeżeli dla $n \geq n_0$ (gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$) zachodzi nierówność*

$$a_n \geq b_n > 0$$

i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest rozbieżny, to również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest rozbieżny.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 6.

7. Zbadać zbieżność szeregów o następującym wyrazie ogólnym

$$\text{a.)}\quad a_n = \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{3^n}, \qquad \text{b.)}\quad a_n = \frac{1}{n5^n},$$
$$\text{c.)}\quad a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{7^n}, \qquad \text{d.)}\quad a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{2},$$
$$\text{e.)}\quad a_n = n^{-\frac{n+2}{2n}}, \qquad \text{f.)}\quad a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}},$$
$$\text{g.)}\quad a_n = \frac{\sqrt[n]{10}}{n^2}, \qquad \text{h.)}\quad a_n = \frac{2}{\sqrt{n+3}}.$$

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie 7 i zadanie 6.

8. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu o wyrazie ogólnym $a_n \geq 0$ wynika zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n^2. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

9. Udowodnić, że szereg utworzony z odwrotności wyrazów ciągu arytmetycznego jest rozbieżny.
Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 6.

10. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

$$\text{a.)}\quad a_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \qquad \text{b.)}\quad a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + 2^n}},$$
$$\text{c.)}\quad a_n = \log\frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[k]{n}-1} \quad (k \in \mathbb{N}; k, n \geq 2), \qquad \text{d.)}\quad a_n = \log\frac{1+n^2}{n^2},$$
$$\text{e.)}\quad a_n = \frac{1}{\log n}, \quad n \geq 2, \qquad \text{f.)}\quad a_n = \log(1+\frac{1}{n}).$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie 7 i zadanie 6. W punktach c.) - f.) oprzeć się na nierówności (63) rozdz. III §4.

11. Udowodnić zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \qquad (n \geq 2).$$

Wskazówka. Najpierw udowodnić równość

$$(\log n)^{\log n} = n^{\log\log n},$$

następnie skorzystać z twierdzenia 7.

12. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu o wyrazie ogólnym $a_n > 0$ wynika zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\, a_{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Wskazówka. Najpierw udowodnić nierówność

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \qquad (a,\ b \ge 0),$$

następnie zastosować twierdzenie 7.

13. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu o wyrazie ogólnym $a_n > 0$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^{\alpha}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

14. Udowodnić rozbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \text{gdzie} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad n \neq 2^k, \\ -1 & \text{gdy} \quad n = 2^k. \end{cases}$$

Wskazówka. Oznaczając

$$A_k = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}-1} - \frac{1}{2^k}$$

oszacować z dołu wyrażenie A_k a następnie sumę częściową S_{2^k}.

15. W przedziale $(0,1]$ rozważmy funkcję przedziałami liniową

$$f(x) = b_n - nx \quad \text{dla} \quad \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

przy czym ciąg $\{b_n\}$ określony jest wzorem rekurencyjnym

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n+1}, \qquad b_1 = 1.$$

Udowodnić, że funkcja f

a.) jest ciągła w przedziale $(0,1]$,

b.) nie jest jednostajnie ciągła w tym przedziale.

Zbadać jej różniczkowalność i naszkicować wykres.

Wskazówka. W punkcie b.) zauważyć, że

$$\Delta_p = f\left(\frac{1}{n+p+1}\right) - f\left(\frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n+p+1}$$

i wobec tego różnica między największą i najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $[\frac{1}{n+p+1}, \frac{1}{n}]$ wynosi

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \cdots + \Delta_p = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p+1}.$$

Następnie ustalić liczbę n i dobrać odpowiednio liczbę p korzystając z rozbieżności szeregu harmonicznego.

16*. Znaleźć rozwinięcie przy podstawie p liczby naturalnej m gdy

$$\begin{array}{llll} \text{a.)}\ \ p=2; & m=35, & m=49, & m=57, \\ \text{b.)}\ \ p=3; & m=21, & m=39, & m=72. \end{array}$$

17*. Przy podstawie p znaleźć rozwinięcia właściwe i niewłaściwe liczby α, gdy

$$\begin{array}{ll} \text{a.)}\ \ p=2, & \alpha=\frac{7}{32}; \\ \text{b.)}\ \ p=4, & \alpha=\frac{35}{64}; \\ \text{c.)}\ \ p=10, & \alpha=\frac{275}{100}. \end{array}$$

18*. Znaleźć rozwinięcie przy podstawie p liczby wymiernej w gdy

$$\begin{array}{ll} \text{a.)}\ \ p=10, & w=\frac{5}{6}; \\ \text{b.)}\ \ p=2, & w=\frac{4}{5}; \\ \text{c.)}\ \ p=5, & w=\frac{153}{500}. \end{array}$$

19*. Liczba α ma przy podstawie p rozwinięcie

$$\begin{array}{ll} \text{a.)}\ \ p=10, & \alpha=1,27323232\ldots \\ \text{b.)}\ \ p=10, & \alpha=0,135010305001003005\ldots \\ \text{c.)}\ \ p=2, & \alpha=10,101001000100001\ldots\ (2) \\ \text{d.)}\ \ p=2, & \alpha=0,1110101010\ldots\ (2) \\ \text{e.)}\ \ p=5, & \alpha=0,12340102030401002003004\ldots\ (5) \\ \text{f.)}\ \ p=5, & \alpha=4,1234343434\ldots\ (5) \end{array}$$

Które z podanych liczb α są wymierne? Przedstawić te liczby przy pomocy ułamka.

20. Przedstawić w postaci ułamka liczbę w mającą rozwinięcie dziesiętne
a.) $w=0,272727\ldots,$ b.) $w=1,351351351\ldots,$
mnożąc obie strony równości przez odpowiednią potęgę 10 i rozumując podobnie, jak w Przykładzie 9 (ii).

21. Liczba w ma rozwinięcie okresowe
a.) $w = 0, c_1c_2c_1c_2c_1c_2 \ldots (p)$,
b.) $w = 0, c_1c_2 \ldots c_tc_1c_2 \ldots c_tc_1c_2 \ldots c_t \ldots (p)$.
Przedstawić liczbę w w postaci ułamka, stosując metodę podaną w zadaniu 20
(i) dla $p = 10$,
(ii) dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

22. Załóżmy, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są zbieżne i że zachodzą nierówności
(i) $a_n \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $a_{n_0} < b_{n_0}$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$.
Udowodnić, że wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$