♡ ♡ ♡

§2. Aksjomat kresu i jego konsekwencje.

1. Zbiory ograniczone. Kres górny i dolny zbioru. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z dołu*, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista p, że dla wszystkich $a \in A$ zachodzi nierówność

$$p \leq a. \tag{1}$$

Liczbę p nazywamy *ograniczeniem dolnym* zbioru A. Sens geometryczny podanej definicji jest jasny - zbiór A interpretowany na osi liczbowej zawiera się w półprostej, której lewym końcem jest punkt p (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku).

Analogicznie mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista P, że

$$a \leq P \tag{2}$$

dla wszystkich $a \in A$. Liczbę P nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A. Zbiór A interpretowany na osi liczbowej jest wówczas zawarty w półprostej, której prawym końcem jest punkt P.

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony* jeżeli jest ograniczony z dołu i z góry, to znaczy jeżeli istnieją takie liczby rzeczywiste p, P, że

$$p \leq a \leq P \tag{3}$$

dla wszystkich $a \in A$. Geometrycznie oznacza to, że zbiór A interpretowany na osi liczbowej zawiera się w odcinku o końcach p, P.

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że przedział $[p, P]$ został zastąpiony przedziałem większym, symetrycznym względem początku układu współrzędnych. Dlatego definicja zbioru ograniczonego może być również sformułowana następująco:

Zbiór A nazywamy *ograniczonym*, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia Q, że

$$|a| \leq Q \tag{4}$$

dla wszystkich $a \in A$.

Oczywiście każdy zbiór ograniczony z góry ma nieskończenie wiele ograniczeń górnych - nierówność (2) pozostanie słuszna jeżeli liczbę P zastąpimy przez $P+r$ gdzie r jest dowolną liczbą dodatnią. Podobnie zbiór ograniczony z dołu ma nieskończenie wiele ograniczeń dolnych, gdyż nierówność (1) pozostaje prawdziwa po zastąpieniu p przez $p - r$.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry. Najmniejsze z jego ograniczeń górnych nazywamy *kresem górnym* zbioru A i oznaczamy $\sup A$. Liczba

$$M = \sup A$$

(czytamy: supremum A) ma więc następujące własności:
(i) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$a \leq M$$

(liczba M jest więc ograniczeniem górnym zbioru A),
(ii) dla dowolnej liczby $M' < M$ można znaleźć taką liczbę $a' \in A$, że

$$M' < a'$$

(zatem każda liczba mniejsza od M nie jest już ograniczeniem górnym zbioru A).

Podaną definicję kresu górnego można sformułować w sposób równoważny następująco:

Liczba M jest *kresem górnym* zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki
(sup1) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$a \leq M, \tag{5}$$

(sup2) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $a_\varepsilon \in A$ takie, że

$$M - \varepsilon < a_\varepsilon. \tag{6}$$

Jeżeli $A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem ograniczonym z dołu, to zupełnie podobnie możemy zdefiniować jego *kres dolny* - należy tylko w podanych definicjach zmienić kierunek nierówności. A więc *kresem dolnym* zbioru A (oznaczamy $\inf A$, czytamy: infimum A) nazywamy największe z jego ograniczeń dolnych. Zatem liczba

$$m = \inf A$$

ma następujące własności:
(i) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$m \leq a$$

(liczba m jest ograniczeniem dolnym zbioru A),
(ii) dla dowolnej liczby $m' > m$ można znaleźć taką liczbę $a' \in A$, że

$$a' < m'$$

(żadna liczba większa od m nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A). A oto równoważne sformułowanie podanej definicji:

Liczba m jest *kresem dolnym* zbioru A wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki
(inf1) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$m \leq a, \tag{7}$$

(inf2) do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $a_\varepsilon \in A$, że

$$a_\varepsilon < m + \varepsilon. \tag{8}$$

2. Aksjomat kresu. Zdefiniowaliśmy kres górny ograniczonego z góry zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jako liczbę najmniejszą w zbiorze wszystkich jego ograniczeń górnych. Nie jest jednak rzeczą oczywistą, że taka liczba istnieje, gdyż bardzo łatwo podać przykłady zbiorów nie mających liczby najmniejszej.

Przykład. W przedziale otwartym $\mathbb{P} = (0, 1)$ nie ma ani liczby najmniejszej ani liczby największej. Jeżeli bowiem $c \in \mathbb{P}$, to

$$0 < \frac{c}{2} < c < \frac{c+1}{2} < 1,$$

a więc do każdej liczby z przedziału $\mathbb{P}$ istnieją liczby większa i mniejsza, również należące do tego przedziału.

Istnienie kresu górnego dowolnego zbioru liczb rzeczywistych ograniczonego z góry gwarantuje *aksjomat kresu* zapowiedziany w §1. Sformułujemy go następująco:

(14a) Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z góry ma w zbiorze liczb rzeczywistych kres górny.

Jak już zauważyliśmy, w aksjomatach (1a) - (13a) sformułowane są własności liczb rzeczywistych dobrze znane ze szkolnej praktyki rachunkowej. Wszystkie te własności mają w szczególności liczby wymierne. Inaczej przedstawia się sprawa w przypadku sformułowanego przed chwilą aksjomatu (14a). Zastępując w nim zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ przez zbiór wszystkich liczb wymiernych W otrzymalibyśmy twierdzenie fałszywe, jak wskazuje następujący prosty przykład:

Niech A będzie zbiorem przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem liczby $\sqrt{2}$ (w §1 punkt 9 udowodniliśmy, że jest to liczba niewymierna). Zbiór $A \subset W$ jest ograniczony z góry (ograniczeniem górnym jest $\sqrt{2}$) natomiast nie zawiera on liczby największej, gdyż do każdego przybliżenia dziesiętnego z niedomiarem można znaleźć przybliżenie z niedomiarem zawierające o jedną liczbę po przecinku więcej, a więc większe od poprzedniego.

W aksjomacie kresu sformułowana jest więc pewna nowa własność zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ która odróżnia go w istotny sposób od zbioru wszystkich liczb wymiernych W.

3. Własności kresu górnego i dolnego zbioru. Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ przyjmiemy oznaczenie

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : x = -a,\ a \in A\}.$$

Łatwo sprawdzić że

(s_1) zbiór A jest ograniczony z góry (z dołu) wtedy i tylko wtedy gdy zbiór $-A$ jest ograniczony z dołu (z góry),

(s_2) jeżeli A jest ograniczony z góry i $\sup A = M$, to $\inf(-A) = -M$,
(s_3) jeżeli A jest ograniczony z dołu i $\inf A = m$, to $\sup(-A) = -m$.
Dla przykładu udowodnimy stwierdzenie (s_2). Z warunku (sup1) otrzymujemy dla dowolnego $a \in A$

$$-M \leq -a$$

zatem $-M$ jest ograniczeniem dolnym zbioru $-A$. Z warunku (sup2) wynika że do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $a_\varepsilon \in A$ takie, że

$$-a_\varepsilon < -M + \varepsilon.$$

Zatem liczba -M spełnia oba warunki (inf1), (inf2) z zastąpieniem A przez $-A$, jest więc kresem dolnym zbioru $-A$. Dowody stwierdzeń (s_1), (s_3) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Z aksjomatu kresu (14a) i ze stwierdzeń (s_1) (s_2) wynika natychmiast

Twierdzenie 1. *Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z dołu ma w zbiorze liczb rzeczywistych kres dolny.*

DOWÓD. Wobec (s_1) zbiór $-A$ jest ograniczony z góry, zatem na mocy aksjomatu kresu ma w zbiorze $\mathbb{R}$ kres górny M. Ze stwierdzenia (s_2) wynika, że liczba $-M$ jest kresem dolnym zbioru $-(-A) = A$. $\square$

Z przyjętych definicji wynika, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nie jest ograniczony z góry, jeżeli żadna liczba rzeczywista nie jest jego ograniczeniem górnym. Oznacza to, że do dowolnej liczby rzeczywistej P można dobrać liczbę $a_P \in A$ taką, że

$$a_P > P.$$

Przyjmiemy w takim przypadku, że

$$\sup A = \infty.$$

Podobnie, zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nie jest ograniczony z dołu, jeżeli nie ma on żadnego ograniczenia dolnego, co można sformułować inaczej następująco: do dowolnej liczby rzeczywistej p można dobrać liczbę $a_p \in A$ taką, że

$$a_p < p.$$

W tym przypadku przyjmiemy, że

$$\inf A = -\infty.$$

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 2 (zasada Archimedesa). [1] *Do dowolnej liczby rzeczywistej r można dobrać liczbę naturalną większą od niej.*

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Należy okazać, że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry. Przypuśćmy, że jest to nieprawdą, wówczas na mocy aksjomatu kresu istnieje liczba $M = \sup \mathbb{N}$. Na mocy warunku (sup1) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$n \leq M.$$

Zastępując w tej nierówności n przez $n+1$ dostajemy

$$n \leq M - 1$$

dla dowolnej liczby naturalnej n. Wynika stąd że liczba $M-1$ jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathbb{N}$, co przeczy definicji kresu górnego. □

4. Zasada Dedekinda.[2] Niech A, B będą takimi niepustymi zbiorami liczb rzeczywistych, że

$$\mathbb{R} = A \cup B \tag{9}$$

Rozkład zbioru $\mathbb{R}$ określony wzorem (9) nazywamy *przekrojem*, jeżeli ma następujące własności:

(1p) zbiory A, B nie mają elementów wspólnych,

(2p) dla dowolnych liczb $a \in A, b \in B$ zachodzi nierówność

$$a < b.$$

Zachodzi

Twierdzenie 3 (zasada Dedekinda). *Jeżeli rozkład* (9) *jest przekrojem, to zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości:*

(i) *w zbiorze A istnieje liczba największa,*

(ii) *w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza.*

DOWÓD. Okażemy najpierw, że warunki (i), (ii) nie mogą być spełnione jednocześnie. Gdyby bowiem tak było, to istniałaby liczba M_1 największa w zbiorze A oraz liczba M_2

---

[1] Archimedes (287 - 212 p.n.e.), urodzony w Syrakuzach, jeden z najwybitniejszych uczonych starożytności. Zajmował się obliczaniem powierzchni figur płaskich i objętości brył, podał oszacowanie liczby π, był twórcą statyki i hydrostatyki oraz wynalazcą urządzeń mechanicznych. Rozwinął i udoskonalił stworzoną przez Eudoksosa metodę wyczerpywania.

[2] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), urodzony w Brunszwiku, w 1852 r. obronił pracę doktorską z rachunku całkowego (promotorem był F. Gauss), był profesorem na uniwersytecie w Getyndze a potem na politechnice w Zurichu i w Brunszwiku. Z nazwiskiem Dedekinda związane są: podana przez niego konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych oraz pojęcia współczesnej algebry (ciało, moduł, krata, pierścień Dedekinda).

najmniejsza w zbiorze B. Z warunku (2p) wynikałaby wówczas nierówność $M_1 < M_2$, wobec czego przyjmując
$$M_0 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$$
mielibyśmy
$$M_1 < M_0 < M_2.$$
Z definicji liczb M_1, M_2 wynikałoby zatem, że liczba M_0 nie należy do żadnego ze zbiorów A, B - co jest sprzeczne z warunkiem (9).

Udowodnimy teraz, że jeden z warunków (i), (ii) jest zawsze spełniony.Wobec warunku (2p) zbiór A jest ograniczony z góry, zatem na mocy aksjomatu kresu istnieje liczba $M = \sup A$. Z warunku (sup1) wynika

$$a \leq M \tag{10}$$

dla dowolnego $a \in A$. Podobnie dla dowolnego $b \in B$ mamy

$$M \leq b. \tag{11}$$

Przypuśćmy bowiem, że istnieje liczba $\bar{b} \in B$ spełniająca nierówność przeciwną

$$\bar{b} < M,$$

wówczas zgodnie z (2p) mamy dla dowolnego $a \in A$

$$a < \bar{b} < M.$$

Zatem liczba $\bar{b}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A mniejszym od M, co przeczy definicji kresu górnego. Na mocy (1p) zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości: albo $M \in A$ albo $M \in B$. W pierwszym przypadku z (10) wynika że liczba M jest największa w zbiorze A, w drugim przypadku wobec (11) liczba M jest najmniejsza w zbiorze B. $\square$

5. Funkcja część całkowita (entier). Dla danej liczby rzeczywistej x symbolem $[x]$ (czytamy: *część całkowita* x, bywa również używany francuski termin *entier* x) oznaczamy największą liczbę całkowitą m spełniającą nierówność

$$m \leq x. \tag{12}$$

Dla przykładu:
$$\left[\frac{5}{2}\right] = 2, \ \left[\frac{1}{3}\right] = 0, \ \left[-\frac{3}{2}\right] = -2.$$
Z definicji liczby $[x] = k$ wynika natychmiast nierówność

$$k \leq x < k + 1.$$

Jeżeli narysujemy oś liczbową zaznaczając na niej liczby całkowite, to z rysunku widać że zbiór $\mathbb{R}$ daje się przedstawić jako suma rozłącznych przedziałów postaci $[m, m+1)$ gdzie

$m \in Z$. Ustalona dowolnie liczba rzeczywista x leży zatem w jednym z tych przedziałów, przy czym jego lewy koniec ma współrzędną $[x]$.

Podana definicja liczby $[x]$ może nasuwać wątpliwości. Zauważmy, że istnienie liczby największej w danym zbiorze liczbowym (w naszym przypadku w zbiorze liczb całkowitych k spełniających nierówność (12)) nie jest bynajmniej oczywiste. Łatwo przecież podać przykład zbioru nie mającego tej własności, na przykład w przedziale $(0,1)$ nie istnieje liczba największa. Opierając się na aksjomacie kresu udowodnimy, że przyjęta przez nas definicja liczby $[x]$ jest poprawna.

Twierdzenie 4. *W zbiorze A liczb całkowitych m spełniających warunek* (12) *istnieje liczba największa.*

DOWÓD. Zbiór A nie jest pusty. Gdyby bowiem dla dowolnej liczby całkowitej m zachodziła nierówność $m > x$, to przyjmując $m = -n$, $n \in \mathbb{N}$ otrzymalibyśmy jako wniosek

$$n < -x$$

dla dowolnego n naturalnego, co byłoby sprzeczne z zasadą Archimedesa (twierdzenie 2). Ponieważ z definicji zbiór A jest ograniczony z góry, na mocy aksjomatu (14a) istnieje liczba rzeczywista $k = \sup A$. Przypuśćmy teraz, że w zbiorze A nie istnieje liczba największa. Wobec tego $k \notin A$ a ponadto z definicji kresu górnego wynika istnienie takiej liczby $m_1 \in A$, że

$$k - 1 < m_1 < k.$$

Ponieważ założyliśmy że w A nie ma liczby największej, zatem istnieje z kolei liczba $m_2 \in A$ spełniająca nierówność

$$k - 1 < m_1 < m_2 < k. \tag{13}$$

Z (13) wynika że liczba całkowita $m_2 - m_1$ spełnia nierówność

$$0 < m_2 - m_1 < 1,$$

z której wynika, że $m_2 - m_1$ jest liczbą naturalną. Jest to jednak niemożliwe. Na mocy definicji bowiem zbiór $\mathbb{N}$ jest najmniejszym zbiorem induktywnym zawiarającym liczbę 1, nie może więc należeć do niego żadna liczba z przedziału $(0,1)$. $\square$

6. Liniowa gęstość zbioru liczb wymiernych. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi, $a < b$. Przy pomocy funkcji *część całkowita* łatwo skonstruować liczbę wymierną w spełniającą nierówność

$$a < w < b. \tag{14}$$

Ustalając mianowicie liczbę naturalną n oznaczmy $[na] = k$, wówczas

$$k \leq na < k + 1$$

a zatem

$$\frac{k}{n} \le a < \frac{k+1}{n} \tag{15}$$

skąd wynika, że

$$\frac{k+1}{n} - a \le \frac{1}{n}. \tag{16}$$

Obierzmy teraz liczbę naturalną $n > (b-a)^{-1}$ (jest to możliwe na mocy zasady Archimedesa). Wówczas z (15), (16) wynika, że liczba $w = \dfrac{k+1}{n}$ spełnia nierówność (14). Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 5 (o liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych). *W każdym przedziale otwartym $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $(a < b)$ leży co najmniej jedna liczba wymierna.*

□

7. Istnienie pierwiastka arytmetycznego z liczby dodatniej. Niech a będzie liczbą rzeczywistą dodatnią i niech $k \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy (por. §1 punkt9), że *pierwiastkiem arytmetycznym stopnia k z liczby a* nazywamy liczbę dodatnią b taką, że $b^k = a$. W dalszym ciągu przez pierwiastek stopnia k będziemy zawsza rozumieli pierwiastek arytmetyczny, używając oznaczenia

$$b = \sqrt[k]{a}$$

lub

$$b = \sqrt{a}$$

gdy $k = 2$.

W §1 punkt 9 udowodniliśmy, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Pierwiastek arytmetyczny może zatem nie istnieć w zbiorze liczb wymiernych. Okażemy teraz, że w zbiorze liczb rzeczywistych każda liczba dodatnia ma dokładnie jeden pierwiastek arytmetyczny.

Twierdzenie 6. *Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Do dowolnej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje w zbiorze $\mathbb{R}$ dokładnie jedna liczba $b > 0$ taka, że*

$$b^k = a. \tag{17}$$

DOWÓD. Liczba b, jeżeli istnieje, jest jedyna. Przypuśćmy bowiem, że istnieją dwie różne liczby dodatnie $b_1 < b_2$ o żądanej własności. Z reguły mnożenia wynika wówczas $b_1^k < b_2^k$, co przeczy równości (17).

W dowodzie istnienia liczby b będziemy korzystali z zasady Dedekinda (twierdzenie 3), które jak wiemy jest konsekwencją aksjomatu kresu (14a), oraz z zasady Archimedesa (twierdzenie 2). Dla uproszczenia rachunków przyjmiemy $k = 3$ (dla innych wartości k rozumowanie jest podobne). Dowód rozbijemy na kilka punktów.

i) Niech

$$A = (-\infty, 0] \cup \{x : x > 0, x^3 < a\},$$
$$B = \{x : x > 0, x^3 \geq a\}.$$

Z definicji widać że zbiory A, B są rozłączne oraz że

$$\mathbb{R} = A \cup B. \tag{18}$$

ii) Zbiór A nie jest pusty na mocy definicji. Natomiast dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(a + n)^3 \geq a^3 + 3a^2 n \geq a$$

jeżeli obierzemy

$$n \geq \frac{a - a^3}{3a^2},$$

wobec tego również zbiór B nie jest pusty.

iii) Dla dowolnych $x \in A$, $y \in B$ zachodzi nierówność

$$x < y.$$

Jest to oczywiste gdy $x \leq 0$. Nierówność ta zachodzi również gdy obie liczby x, y są dodatnie, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy $x > y$ a więc $x^3 > y^3 \geq a$ wbrew założeniu że $x \in A$.

iv) W zbiorze A istnieją liczby dodatnie, np. liczby postaci $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{a}$, dla takich liczb zachodzi bowiem nierówność

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n} < a.$$

v) Z punktów i) - iii) wynika, że rozkład (18) jest przekrojem. Okażemy, że do każdej liczby $x \in A$ można dobrać $\bar{x} \in A, \bar{x} > x$ (czyli że w zbiorze A nie istnieje liczba największa). Jeżeli $x \leq 0$, to istnienie takiej liczby $\bar{x}$ wynika z punktu iv). Załóżmy wobec tego, że $x > 0$. Mamy wówczas

$$(x + \frac{1}{n})^3 = x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} + \frac{1}{n^3} <$$
$$< x^3 + \frac{w(x)}{n},$$

gdzie

$$w(x) = 3x^2 + 3x + 1 > 0.$$

Obierając

$$n > \frac{w(x)}{a - x^3},$$

co jest możliwe na mocy zasady Archimedesa (twierdzenie 2), otrzymujemy

$$(x + \frac{1}{n})^3 < a.$$

Zatem $\bar{x} = x + \frac{1}{n} \in A$.

vi) Z punktu v) wynika na mocy zasady Dedekinda (twierdzenie 3), że w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza y_0. Okażemy że y_0 jest szukaną liczbą b spełniającą warunek (17).

Przypuśćmy, że tak nie jest, wobec tego musi być

$$y_0^3 > a.$$

Okażemy, że przy odpowiednim wyborze liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(y_0 - \frac{1}{n})^3 > a. \tag{19}$$

Istotnie, mamy

$$(y_0 - \frac{1}{n})^3 > y_0^3 - \frac{3y_0^2 + 1}{n}$$

a zatem nierówność (19) jest spełniona dla

$$n \; > \; \frac{3y_0^2 + 1}{y_0^3 - a}$$

wbrew założeniu, że y_0 jest najmniejszą liczbą w zbiorze B. Musi być zatem $y_0^3 = a$, co kończy dowód. □

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Znaleźć kres górny $M \leq \infty$ oraz kres dolny $m \geq -\infty$ następujących zbiorów:

$$A_1 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x - 3 \leq 0\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq x\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} : x \sin x \geq 0\} \cap [-4\pi, 2\pi)$$

$$A_5 = \{5 - n^2 : n \in \mathbb{N}\} \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$$

$$A_6 = \{x \in \mathbb{R} : x = \sin(\frac{n\pi}{3}), n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Udowodnić że w zbiorze liczb wymiernych należących do przedziału $(0,1)$ nie istnieje liczba największa ani liczba najmniejsza. Porównać to stwierdzenie z aksjomatem kresu (14a) i z twierdzeniem 1.

3. Naszkicować wykres funkcji $y = [x]$.

4. Udowodnić, że $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy gdy n jest kwadratem tzn. gdy $n = p^2$ gdzie $p \in \mathbb{N}$.
Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu o jednoznacznym rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze (por. notka §1 punkt 9).

5. Udowodnić że liczba $\sqrt{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ jest niewymierna.
Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 4.

6.Udowodnić twierdzenie:
Do dowolnych liczb rzeczywistych a, b $(a < b)$ istnieje liczba niewymierna c taka, że

$$a < c < b.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu o liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych i wykorzystać zadanie 5.

7. Udowodnić, że jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ spełniona jest nierówność

$$0 \le a \le \varepsilon$$

to $a = 0$.
Wskazówka. Zastosować twierdzenie 5.

8. Niech

$$A = (-\infty, 0) \cup \{1\}, \; B = [0,1) \cup (1, \infty).$$

Czy rozkład $\mathbb{R} = A \cup B$ jest przekrojem?

9. Wykazać, że liczby wymierne a, b, c spełniające warunek

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

muszą być wszystkie równe zeru.

10. Wykazać, że liczba $a\sqrt{2} + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są wymierne, jest wymierna jedynie dla $a = b = 0$.

11. Mówimy, że *liczba x daje się wyrazić wymiernie przez liczbę y*, jeżeli istnieją wielomiany w_1, w_2 o współczynnikach wymiernych takie, że

$$x = \frac{w_1(y)}{w_2(y)}.$$

Udowodnić że

a.) $\sqrt{2}$ nie daje się wyrazić wymiernie przez $\sqrt{3}$,

b.) obie liczby $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ dają się wyrazić wymiernie przez $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

12. Udowodnić, że dla dowolnie ustalonego $a > 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych istnieją liczby $\sqrt{a}$ oraz $\sqrt[4]{a}$.
Wskazówka. Przeprowadzić rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzenia 6.

13. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$|x| = [x].$$