

4 CZERWCA 2011

**Zad. 1**

Wykaż, że  $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ , gdzie  $M_1$  – środek boku  $BC$ ,  $H$  – ortocentrum, czyli punkt przecięcia wysokości,  $O$  – środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

**Zad. 2**

Przez wierzchołek  $C$  i środek środkowej  $AM_1$  poprowadzono prostą. W jakim stosunku dzieli ona bok  $AB$  trójkąta  $ABC$ ?

**Zad. 3**

Wykaż, że styczna w wierzchołku  $A$  do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  jest równoległa do  $H_2H_3$ , gdzie  $H_2$  – spodek wysokości z wierzchołka  $B$ ,  $H_3$  – spodek wysokości z wierzchołka  $C$ .

**Zad. 4**

Okręgi o promieniach  $r$  i  $R$  styczne zewnętrznie są jednocześnie styczne do ramion pewnego kąta. Znajdź promień okręgu stycznego do ramion tego kąta, którego środek leży w punkcie styczności danych okręgów.

**Zad. 5**

Niech pole trójkąta  $ABC = S_1$  a pole trójkąta  $ABH = S_2$  ( $H$  – ortocentrum trójkąta  $ABC$ ). Na prostej  $CH$  obrano punkt  $K$  taki, że  $\sphericalangle AKB = 90^\circ$ . Wykaż, że pole trójkąta  $ABK$  jest średnią geometryczną  $S_1$  i  $S_2$ , tzn.  $P_{\Delta ABK} = \sqrt{S_1 S_2}$ .

**Zad. 6**

W trójkącie  $ABC$  poprowadzono dwusieczne  $AD$  i  $BE$ , które przecinają się w punkcie  $Q$ . Odcinek  $DE$  ma długość 1. Punkty  $C, D, E, Q$  są współokręgowe. Oblicz długości boków trójkąta  $DEQ$ .

**Zad. 7**

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości  $a$  i  $b$  dwusieczna kąta prostego utworzyła dwa trójkąty. Oblicz odległość ich ortocentrów.

**Zad. 8**

W trójkącie  $ABC$  długości boków wynoszą:  $AC = b$ ,  $AB = c$ , a punkt  $K$  jest rzutem prostokątnym punktu wspólnego dwusiecznej  $\sphericalangle A$  i okręgu opisanego na trójkącie na prostą  $AC$ . Wykaż, że  $AK$  jest średnią arytmetyczną długości  $AB$  i  $AC$ , tzn  $AK = \frac{b+c}{2}$ .

**Zad. 9**

Przez punkt  $M$  wewnątrz trójkąta poprowadzono proste równoległe do boków. Odcinki wycięte z tych prostych przez boki są równe. Znajdź ich długość, jeśli długości boków trójkąta wynoszą  $a, b, c$ .

**Zad. 10**

Dwusieczne kątów  $A$  i  $C$  przecinają okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  w punktach  $W_1$  i  $W_3$ . Prosta przechodząca przez incentrum trójkąta (czyli środek okręgu wpisanego w ten trójkąt) równoległa do boku  $AC$  przecina prostą  $W_1W_3$  w punkcie  $P$ . Wykaż, że prosta  $PB$  jest styczną do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .