Całki elementarnie

Zkładamy, że f i g są funkcjami ciagłymi.

1. Niech T będzie graniastosłupem o wierzchołkach $(\frac{\pm 1+1}{2}, \frac{\pm 1+1}{2}, 0)$ i $(0,0,1)$. Pokaż, że jego objętość wynosi $\frac{1}{3}$ poprzez złożenie sześcianu o boku 1 z trzech kopii T. Zrób jak najbardziej przekonujące rysunki.
2. Oblicz $\int_a^b x^2 dx$ korzystając ze wzoru na pole odcinka paraboli.
3. Oblicz pole obszaru $\{(x,y)\colon -1 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ x^2-1 \leqslant y \leqslant -x^2+1\}$.
4. Niech $A = \{(x,y)\colon -2 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant -x^2+4\}$ oraz $B = \{(x,y)\colon x^2 \leqslant y\}$. Oblicz pole $A - B$.
5. Znajdź zwarty wzór na $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.
6. Zapisz $\int_a^b f(x)dx$ jako granicę sumy. Możesz na początku założyć, że $a = 0$ oraz $b = 1$.
7. Niech $c, d \in \mathbf{R}$ będzie stałą. Pokaż, że
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$
oraz, że
$$\int_a^b cf(x) + dg(x)dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx.$$
8. Policz $\int_0^\pi \sin^2(x)dx$.
9. Za pomocą całki policz objętość ostrosłupa o polu podstawy P oraz wysokości H.
10. Znajdź wszystkie macierze, które zachowują parabolę $y = x^2$. Znajdź wszytkie funkcje afiniczne, które zachowują parabolę. Wywnioskuj, że pole trójkąta o wierzchołkach których pierwsze współrzędne to a, $\frac{a+b}{2}$, b zależy jedynie od $(b-a)^3$.