LICZBY ZESPOLONE

1. Wprowadzenie

1.1. **Rozgrzewka: gdyby istniały tylko liczby wymierne...** Rozważmy liczby wymierne i rzeczywiste

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Chcielibyśmy znaleźć zbiór liczb zawierający $\mathbf{Q}$, ale jednak znacznie mniejszy od $\mathbf{R}$ i taki, w którym można wykonywać działania arytmetyczne tak jak w $\mathbf{R}$. W tym celu rozpatrzmy zbiór liczb

$$\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\},$$

czyli zbiór tych liczb rzeczywistych, które da się przedstawić jako $a+b\sqrt{2}$ dla pewnych liczb $a, b \in \mathbf{Q}$. Czy na liczbach z $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ można wykonywać podstawowe operacje arytmetyczne i w wyniku otrzymać liczbę z $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$?

Z. *Pokaż, że jeżeli $x, y \in \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, to $-x$, $x + y$ oraz $xy \in \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$.*

Z. *Pokaż, że jeżeli $x \in \mathbf{Q}[\sqrt{2}]\backslash\{0\}$, to $1/x$ też jest elementem ze zbioru $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. Wsk. usuwanie niewymierności z mianownika.*

Z powyższych zadań wynika, że możemy wykonywać dodawanie, mnożenie oraz odwracanie liczb wewnątrz $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, nie odwołując się do żadnych innych liczb rzeczywistych. Mówimy, że zbiór $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ jest zamknięty na dodawanie, mnożenie i odwrotność.

Cofnijmy się teraz trochę i wyobraźmy sobie, że nigdy nie słyszeliśmy o liczbach rzeczywistych - znamy tylko liczby wymierne. Nie wiemy więc co to jest $\sqrt{2}$. Moglibyśmy wtedy pomyśleć, tak tylko teoretycznie, o takiej liczbie, która podniesiona do kwadratu daje 2. Nazwijmy ją jakoś, np. j. Mamy zatem $j^2 = 2$.

Idąc za przykładem poprzedniej konstrukcji, rozważmy zbiór napisów postaci $a + bj$ gdzie a i $b \in \mathbf{Q}$. Zauważmy, że teraz $a+bj$ nie jest jakąś konkretną liczbą rzeczywistą, jest dla nas po prostu napisem. Możemy zdefiniować zbiór napisów:

$$\mathbf{Q}[j] = \{a + bj \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

Na takich napisach możemy wykonywać operacje dodawania:

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (c + d)j.$$

Możemy też mnożyć. Tam gdzie pojawia się j^2 wstawiamy zwyczajnie 2.

$$(a + bj)(c + dj) = ac + bd(j^2) + (ad + bc)j = ac + 2bd + (ad + bc)j.$$

Z. *Oblicz* $\frac{1}{a+bj}$.

Można się domyślić, że liczby postaci $a + bj$ zachowują się dokładnie tak jak liczby postaci $a + b\sqrt{2}$ (zobacz rozdział 1.3). Odtworzyliśmy więc zbiór $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ korzystając jedynie z 'abstrakcyjnej' liczby j.

1.2. **Definicja liczb zespolonych.** W poprzednim paragrafie ograniczaliśmy się do liczb wymiernych i dodaliśmy do nich nową liczbę j taką, że $j^2 = 2$. Z punktu widzenia kogoś, kto zna tylko liczby wymierne, jest to nowa abstrakcyjna liczba. Podobnie jest ze zbiorem liczb rzeczywistych: nic nie stoi na przeszkodzie aby spróbować dodać do nich jakąś nową liczbę.

Spróbujmy zrobić najprostszą rzecz: dodać taką liczbę, nazwijmy ją i, która spełniałaby równanie $i^2 = -1$. Mając ten pomysł, wszystko robimy już analogicznie jak w poprzednim rozdziale. Definiujemy zbiór napisów

$$\mathbf{R}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Takie napisy nazywamy liczbami zespolonymi a zbiór $\mathbf{R}[i]$ oznacza się zazwyczaj przez $\mathbf{C}$. Napis i nazywa się jednostką urojoną. Podkreślmy, że są to tylko nazwy, i nie jest w żaden sposób bardziej urojone niż $\sqrt{2}$.

Zazwyczaj liczby zespolone oznaczamy przez z oraz piszemy $z = a+bi$. Mówimy, że a to część rzeczywista liczby z a b to jej część urojona i piszemy $a = Re(z)$, $b = Im(z)$.

Jak łatwo wyliczyć, w liczbach zespolonych dodawanie wygląda następująco:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

oraz mnożenie:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$$

W tym miejscu warto zrobić kilka przykładow z zadania 1).

Pierwszą nieoczywistą własnością liczb zespolonych jest to, że każda niezerowa liczba zespolona ma liczbę odwrotną. Mając liczbę $a + bi$ chciałoby się napisać, że liczba do niej odwrotna to $\frac{1}{a+ib}$. Ale zastanówmy się... to jest tylko napis, który chcemy zinterpretować jako pewną liczbę zespoloną.

Z. *Postępując analogicznie jak w przypadku usuwania niewymierności z mianownika, zamień napis* $\frac{1}{a+ib}$ *na 'prawdziwą' liczbę zespoloną.*

1.3. **Uzupełnienie: więcej o $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ oraz $\mathbf{Q}[j]$.** Dwie liczby wymierne a, b definiują oczywiście liczbę $a + b\sqrt{2}$ z naszego zbioru $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. Jeżeli wezmę jakieś dwie nowe liczby wymierne a', b', to czy liczba $a' + b'\sqrt{2}$ będzie różna od $a + b\sqrt{2}$? Wyrazimy to w trochę bardziej wyrafinowanym języku:

Z. *Pokaż, że funkcja* $f\colon \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ *zadana wzorem* $f(a, b) = a + b\sqrt{2}$ *jest bijekcją.*

Z poprzedniego zadania wynika, że każda liczba ze zbioru $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ ma jednoznaczną reprezentację jako para liczb wymiernych.

Z. *Pokaż, że przyporządkowanie* $f\colon \mathbf{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Q}[j]$ *zdefiniowane wzorem* $f(a+b\sqrt{2}) = a+bj$ *jest dobrze określone oraz, że mnożenie i dodawanie w* $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ *odpowiada mnożeniu i dodawaniu w* $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ *(mówimy wtedy, że* f *jest izomorfizmem).*

1.4. **Zadania.**

Z1. *Oblicz:*

a) $(5+3i)+(1-2i)$, *b)* $5(2+i)$, *c)* $1+4i+i^2-2(2i)$, *d)* $(4+i)(5+6i)$,
e) $(3+i)(3-i)$, *f)* $(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i)$, *g)* $(2-i)^3$, *h)* $(3+4i)(1-2i)(1+2i)$.

Z2. *Policz* z^{-1} *dla liczb:* $z = i, 1+i, 4-5i, i-16$.

Z3. *Oblicz* i^n *dla* $n \in \mathbf{N}$.

Z4. *Oblicz:*

a) $\frac{3-i}{1+2i}$, *b)* $\frac{1+2i}{i^{2021}}$, *c)* $\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i)}{3-4i}$.

Z5. *Oblicz* $(a+bi)(a-bi)$.

Z6. *Znajdź* z*, gdy*

a) $iz+5-2i = 3z-4i$, *b)* $5z+3+2i = iz+i$, *c)* $5+z+iz+3i = 5+3z+i$.

Z7. *Udowodnij prawo rozdzielności:* $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3+z_2z_3$.

Z8. *Rozważ inną (prostszą?) definicję mnożenia liczb zespolonych:* $(a+bi)(c+di) = ac+bdi$. *Jakie są wady tej definicji mnożenia?*

2. Geometryczne spojrzenie na liczby zespolone

2.1. **Rozgrzewka.** Znamy już podstawowe operacje na liczbach zespolonych i wiemy, że można je przez siebie dzielić. Co z wyciąganiem pierwiastków?

Z. *Zastanów się, co to znaczy pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej. Oblicz pierwiastki kwadratowe z liczb: a)* $z=-1$, *b)* $z=i$, *c)* $z=1+i$.

Z podpunktem *c*) może być problem, jeżeli nie umiesz rozwiązywać równań kwadratowych. Przy odrobinie wprawy można pokazać algebraicznie, że każda niezerowa liczba zespolona ma dokładnie dwa pierwiastki kwadratowe. Celem tego i następnego rozdziału jest to aby stało się dla nas oczywiste, że każda niezerowa liczba zespolona ma pierwiastki dowolnego stopnia.

Liczba zespolona $a+bi$ jest zdefiniowana za pomocą pary liczb rzeczywistych a oraz b. Para liczb, to punkt na płaszczyźnie, także możemy interpretować $a+bi$ jako punkt o współrzędnych a i b, albo jako wektor zaczepiony w początku układu współrzędnych i o końcu w punkcie (a,b).

Rozważmy liczby

$$z_1 = i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_5 = \bar{z}_1, \quad z_6 = \bar{z}_2$$

Zaznacz powyższe liczby na płaszczyźnie. Jakie długości mają wektory które im odpowiadają? Jaki kąt tworzą te wektory z osią poziomą?

Z. *Weź dwie liczby z powyższej listy i pomnóż je, np. znajdź $z_3 z_4$. Zrób kilka takich obliczeń. Czy widzisz jakąś zależność?*

2.2. **Współrzędne biegunowe, czyli postać trygonometryczna liczby zespolonej.** Rozważmy liczbę $z = a + bi$. Jeżeli interpretujemy ją jako wektor, to widzimy, że jej długość to

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Jeżeli kąt, jaki tworzy z osią poziomą wynosi α, to z definicji funkcji trygonometrycznych:

$$cos(\alpha) = \frac{a}{r}$$
$$sin(\alpha) = \frac{b}{r}$$

możemy więc zapisać, że

$$z = r(cos(\alpha) + sin(\alpha)i).$$

Jest to tak zwana postać trygonometryczna liczby zespolonej z. Zauważmy, że tak naprawdę zamieniliśmy współrzędne kartezjańskie punktu (a, b) na współrzędne biegunowe $(rcos(\alpha), rsin(\alpha))$.

Z. *Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby:*

$$a)17, \quad b) - i, \quad c) - 6 + 6i,$$
$$d)\sqrt{2} + \sqrt{6}i, \quad e)\sqrt{3} - i, \quad f)1 - \sin(\alpha) + i\cos(\alpha) \ (0 < \alpha < \pi/2).$$

Przejdźmy teraz do najważniejszej rzeczy - **geometrycznej interpretacji mnożenia liczb zespolonych**. Najpierw przypomnijmy sobie wzory:

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)$$
$$sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)$$

Pomnóżmy dwie liczby zespolone $z = r_z(cos(\alpha) + sin(\alpha)i)$ i $w = r_w(cos(\beta) + sin(\beta)i)$.

$$\begin{aligned} zw &= r_z(cos(\alpha) + sin(\alpha)i) * r_w(cos(\beta) + sin(\beta)i) \\ &= r_z r_w(cos(\alpha) + sin(\alpha)i)(cos(\beta) + sin(\beta)i) \\ &= r_z r_w((cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)) + (sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta))i) \\ &= r_z r_w(cos(\alpha + \beta) + sin(\alpha + \beta)i) \end{aligned}$$

Rachunki są trochę długie, ale pokazują coś dość niezwykłego: po wymnożeniu dwoch liczb zespolonych ich normy się mnożą a kąty dodają.

2.3. **Zadania.**

Z 1. *Narysuj figurę złożoną z punktów, które spełniają warunek (-ki). Wybież kilka (np. 4) przykłady, które wydają Ci się najbardziej interesujące.*

$$a)\mathcal{R}e(z) = 5/2, \quad b)|z| = 1, \quad c)|z-2| = 3, \quad d)|z-i+4| = 9,$$
$$e)\mathcal{I}m(z) \in [-1,4) \ f)\ \mathcal{R}e(z) < 7, \quad g)|z-1| = |z+2|,$$
$$h)|z-i| \geqslant |z+1-3i|, \quad i)\big||z-2i| - |z+2i|\big| = 4.$$

Z2. *Oblicz* $(1+i)^{1000}$.

Z3. *Oblicz:*

$$a)(\sqrt{3}-3i)^6, \quad b)(2-2i)^{17},$$
$$c)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}, \quad d)(\cos(33^o) + i\sin(33^o))^{10}, \quad e)\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}.$$

Z4. *Oblicz wszystkie pierwiastki:*

$$a)\sqrt{2}, \quad b)\sqrt{i}, \quad c)\sqrt{1+i}, \quad d)\sqrt[3]{-1}, \quad e)\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}, \quad f)\sqrt[6]{1+i}, \quad g)\sqrt[4]{-16}.$$

Z5. *Wyznacz wszystkie pierwiastki stopnia* n *z jedynki. Pokaż, że jeżeli* $n > 1$*, to ich suma wynosi* 0.

Z 6. *Niech* $w \in \mathbf{C}$ *i* $w \neq 0$. *Pokaż, że równanie* $z^n = w$ *dla* $w \neq 0$ *ma zawsze* n *różnych rozwiązań w liczbach zespolonych.*

Z 7. *Rozważ funkcję* $z \to 1/\bar{z}$. *Zinterpretuj ją geometrycznie. Pokaż, że obrazem prostej jest okrąg.*

Z8. *Udowodnij wzory:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Z 9. *Powołując się wyłącznie na poprzednie zadanie, zapisz* $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ *jako sumę dwóch kwadratów.*

Z10. *Rozwiązać równanie*

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^3 = i$$

Z11. *Znajdź wszystkie liczby zespolone* z*, dla których* $\overline{z} = z^2$.

Z12. *Wyraź* $\sin(3\theta)$ *jako funkcję* $\sin\theta$*. Podobnie z* $\cos(3\theta), \sin(4\theta)$.

Z13.
- *Zapisz w postaci* $a+bi$ *(* $a,b\in\mathbf{R}$*) iloczyn* $(2+i)(5+i)(8+i)$,
- *o kątach* α,β,γ *wiadomo, że* $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ *oraz że* $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\gamma=\frac{1}{8}$*. Oblicz* $\alpha+\beta+\gamma$.

3. Równania kwadratowe

W liczbach zespolonych można wygodnie rozwiązywać równania kwadratowe. Wtedy każde niezdegenerowane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki (uwaga: niekiedy pierwiastek jest podwójny).

Z1. *Rozwiąż równania kwadratowe w zmiennych zespolonych:*

a) $z^2+1=0$, *b)* z^2-5z+6, *c)* $z^2+2z+2=0$, *d)* z^2-z+1.

Jaką widzisz zależność?

Z2. *Rozwiąż równania kwadratowe w zmiennych zespolonych:*

a) $z^2-2iz-1=0$, *b)* $z^2-(1+2i)z+i-1=0$, *c)* $z^2+2iz+i=0$,
d) $z^2+z(i-5)+5+i=0$.