# Geometria różniczkowa
# Lista 4

1. Rozważmy współrzędne biegunowe $x = rsin(\psi), y = rcos(\psi)$, tzn. dyfeomorfizm $F = (x,y)\colon U_1 \to U_2$ gdzie $U_1 = \mathbf{R}_+ \times (0, 2\pi)$, $U_2 = \mathbf{R}^2 - \{(x,0)\colon x \leqslant 0\}$.
   (a) Wyraź formy $F^*(dx)$, $F^*(dy)$ oraz $F^*(dx \wedge dy)$ za pomocą form $d\psi$, $dr$.
   (b) Zauważ, że forma $(F^{-1})^*(d\psi)$ rozszerza się do formy $\alpha$ na $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. Pokaż, że $\alpha$ nie jest różniczką żadnej funkcji $f \in C^\infty(\mathbf{R^2} - \{0\})$.
2. Grupa Heisenberga to
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x,y,z \in \mathbf{R} \right\}$$
z mnożeniem macierzy jako działaniem. Dla $g \in H$ określamy $l_g\colon H \to H$ wzorem $l_g(h) = gh$ oraz $r_g\colon H \to H$ wzorem $r_g(h) = hg$. Opisz wszystkie pola wektorowe które są niezmiennicze na (a) wszystkie przekształcenia $l_g$; (b) wszystkie przekształcenia $r_g$; (c) wszystkie przekształcenia $l_g$ i wszystkie przekształcenia $r_g$. Następnie zrób to samo dla form stopni 0,1,2,3.
3. Uzasadnij, że $H^1_{DR}(\mathbf{R}^n) = 0$, to znaczy: jeżeli $\omega \in \Omega^1(M)$ taka, że $d\omega = 0$, to $\omega = dF$ dla pewnej funkcji $F$. Wsk: dla $\omega = a\,dx + b\,dy \in \Omega^1(\mathbf{R}^2)$ definiujemy $F(x,y) = \int_0^x a(t,0)dt + \int_0^y b(x,s)ds$. Zrób podobnie dla dowolnego $n$. Czy taka funkcja $F$ jest jedyna?
4. Pokaż, że forma objętości jest dobrze zdefiniowana.
5. Niech $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ i $X \in \mathcal{X}(M)$.
   (a) Zdefiniuj pochodną liego $L_X\omega$ za pomocą potoku pola $X$. Pokaż, że $L_X(\omega\wedge\eta) = (L_X\omega)\wedge\eta+\omega\wedge(L_X\eta)$.
   (b) Pokaż, że $L_X(\omega) = 0 \iff (\Phi^t_X)^*(\omega) = \omega$.
   (c) Pokaż, że dla $\omega \in \Omega^1(M)$ zachodzi wzór $L_X\omega(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y])$.
   (d) Niech $X \in \mathcal{X}(M)$. Operator kontrakcji $i_X : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ definiujemy wzorem
$$i_X(\omega)(X_1,\dots,X_k) = \omega(X, X_1,\dots,X_k).$$
   Pokaż, że $di_X\omega+i_Xd\omega = L_X\omega$ dla $\omega \in \Omega^0(M)\oplus\Omega^1(M)$ (uwaga: dla funkcji przyjmujemy $L_Xf = Xf$).
6. Pokaż, że $d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$.
7. Niech $\omega = \sum_i (-1)^i x^i dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n$ będzie $(n-1)$-formą na $\mathbf{R}^n$, zaś $\iota\colon S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ niech będzie standardowym włożeniem sfery jednostkowej. Uzasadnij, że $\iota^*\omega$ nie znika w żadnym punkcie i że jest niezmiennicza na obroty. Oblicz $\int_{S^{n-1}} \iota^*\omega$.