Geometria elementarna
Lista 2. Miara Jordana

1. Pokaż, że jeżeli $X \subset Y$ są mierzalne, to $P(X) \leqslant P(Y)$.
2. Pokaż z definicji, że następujące figury są mierzalne i oblicz ich pola:
   (a) Odcinek
   (b) Prostokąt o bokach a oraz b
   (c) Trójkąt o podstawie a i wysokości h
   (d) Dywan Sierpińskiego.

   Uwaga: skorzystaj z tego, że pole jest addytywne oraz niezmiennicze na izometrie. Do przybliżeń wewnętrznych można skorzystać ze zbioru pustego, którego pole wynosi 0.
3. Pokaż z definicji, że następujące figury mają pole równe 0.
   (a) Zbiór wszystkich punktów postaci $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$ gdzie $m, n \in \mathbf{N}$
   (b) $\bigcup_i^\infty [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$.
4. Czy suma przeliczalnie wielu zbiorów miary 0 jest miary 0?
5. Uzasadnij, że jeżeli X jest mierzalny a X' jest podobny do X w skali k, to X' jest mierzalny oraz $P(X') = k^2 P(X)$.
6. Uzasadnij, że suma i przekrój dwóch zbiorów mierzalnych jest mierzalna/y (możesz skorzystać z tego, że suma, przekrój, różnica - z dokładnością do brzegu - dwóch figur wielokątnych jest figurą wielokątną).
7. Pokaż, że dla dowolnych dwóch zbiorów mierzalnych A,B zachodzi wzór:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
8. Oblicz pole wycinka koła, tzn. (dowolnej) części koła która powstaje z przecięcia wzdłuż cięciwy o długości d. We wzorze mogą pojawić się funkcje odwrotne do trygonometrycznych.
9. Oblicz pole wycinka krzywej $y = x^3$ metodą Archimedesa:
   (a) Niech T będzie trójkątem o wierzchołkach $A = (a, a^3), B = (b, b^3), C = (c, c^3)$, gdzie $0 < a < b < c$ oraz $b = \frac{a+c}{2}$. Oblicz pole T w terminach $c - a$ oraz b.
   (b) Oblicz pola dwóch trójkątów T_1 oraz T_2 powstałych w 2 kroku metody wypełniania (pierwsze współrzędne wierzchołków T_1 to a, $\frac{a+b}{2}$ oraz c, a T_2 to b, $\frac{b+c}{2}$ oraz c). Wyraź $P(T_1) + P(T_2)$ w terminach pola T.
   (c) Znajdując granicę odpowiedniego szeregu geometrycznego, oszacuj od dołu pole wycinka krzywej $y = x^3$ (załóż, że wycinek ten zawiera się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych).
   (d) Analogicznie jak dla paraboli, pokaż, że powyższe oszacowanie dolne jest prawdziwym polem wycinka $y = x^3$.