

# Analiza funkcjonalna III

Ryszard Szwarc\*

## Spis treści

|   |                                                  |    |
|---|--------------------------------------------------|----|
| 1 | Algebry Banacha                                  | 1  |
| 2 | Teoria Gelfanda                                  | 10 |
| 3 | Rachunek symboliczny w algebrze Banacha          | 18 |
| 4 | C*-algebry                                       | 28 |
| 5 | Operatory nieograniczone na przestrzeni Hilberta | 31 |
| 6 | Rozkład spektralny operatora unitarnego          | 41 |
| 7 | Rozkład spektralny operatora samosprężonego      | 48 |

## 1 Algebry Banacha

**Definicja 1.1.** *Algebrą nazywamy przestrzeń liniową nad  $\mathbb{C}$  z mnożeniem. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania (obustronnie) oraz*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

**Definicja 1.2.** *Algebrą unormowaną nazywamy algebrę z normą spełniającą warunek **podmultiplikatywności***

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

*Jeśli algebra jest zupełna, to nazywamy ją **algebrą Banacha**.*

---

\*Wykład opracowany na podstawie notatek Wiktora Malinowskiego

**Przykłady**(a)  $C[0, 1]$ 

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

tzn. mnożenie jest punktowe. Przedział  $[0, 1]$  można zastąpić zwartą przestrzenią topologiczną.

(b)

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}, \quad \|f\|_\infty = \max |f(x)|$$

(c)  $B(\mathcal{H})$  przestrzeń operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta z normą operatorową:  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ 

**Definicja 1.3.** Algebrę nazywamy przemenną, jeśli mnożenie jest przemienne. Element  $e$  w algebrze  $A$  nazywamy jednością, jeśli

$$ea = ae = a, \quad a \in A$$

**Twierdzenie 1.4.** Każdą algebrę unormowaną (algebrę Banacha) można rozszerzyć do algebry unormowanej (algebry Banacha) z jednością.

*Dowód.* Niech  $A$  będzie algebrą Banacha bez jedności. Określmy mnożenie w przestrzeni liniowej  $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$  wzorem

$$(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu) = (ab + \lambda b + \mu a) \oplus \lambda\mu$$

Określamy normę  $\|a \oplus \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$ . Wtedy element  $0 \oplus 1$  jest jednością w  $\tilde{A}$ , bo

$$(0 \oplus 1)(a \oplus \lambda) = a \oplus \lambda = (a \oplus \lambda)(0 \oplus 1)$$

Norma jest podmultiplikatywna, bo

$$\begin{aligned} \|(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu)\| &= \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\ &\leq \|a\| \|b\| + |\lambda| \|b\| + |\mu| \|a\| + |\lambda| |\mu| \\ &= (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|) = \|a \oplus \lambda\| \|b \oplus \mu\| \end{aligned}$$

Jeśli  $A$  jest zupełna, to również  $\tilde{A}$  jest zupełna. □

**Przykłady**

- (a)  $c_0$  - przestrzeń ciągów o wyrazach zespolonych zbieżnych do 0, z normą  $\|x\| = \sup_n |x_n|$ . Wtedy

$$\tilde{c}_0 = c = \{x : \lim_n x_n \text{ istnieje}\}$$

- (b)  $C_0(\mathbb{R})$ . Wtedy

$$\widetilde{C_0(\mathbb{R})} = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\}$$

W obu przykładach normy w  $\tilde{A}$  są równoważne normom  $\|\cdot\|_\infty$ .

Jeśli  $A \neq \{0\}$  jest algebrą Banacha z jednością  $e$ , to  $e \neq 0$  oraz

$$\|e\| = \|e \cdot e\| \leq \|e\| \|e\|$$

zatem  $\|e\| \geq 1$ .

Odtąd nie będziemy rozważać algebr zerowych  $A = \{0\}$ .

**Twierdzenie 1.5.** *Dla algebry Banacha z jednością istnieje norma na  $A$  równoważna normie wyjściowej, dla której norma jedności wynosi 1.*

*Dowód.* Dla  $x \in A$  rozważamy odwzorowanie  $L_x : A \rightarrow A$  określone wzorem  $L_x y = xy$ . Wtedy  $L_x$  jest operatorem liniowym na  $A$  oraz

$$\|L_x y\| = \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

Zatem  $L_x$  jest operatorem ograniczonym. Mamy

$$\|x\| = \|L_x e\| \leq \|L_x\| \|e\|$$

Zatem  $\|L_x\| \geq \|e\|^{-1} \|x\|$ . Tzn.

$$\|e\|^{-1} \|x\| \leq \|L_x\| \leq \|x\| \quad (1.1)$$

Określmy  $\|x\|' := \|L_x\|$ . Wzór określa normę. Sprawdzimy podaddytywność i podmultiplikatywność.

$$\begin{aligned} \|x + y\|' &= \|L_{x+y}\| = \|L_x + L_y\| \leq \|L_x\| + \|L_y\| = \|x\|' + \|y\|' \\ \|xy\|' &= \|L_{xy}\| = \|L_x L_y\| \leq \|L_x\| \|L_y\| = \|x\|' \|y\|' \end{aligned}$$

Ponadto  $\|e\|' = \|L_e\| = \|I\| = 1$ . Na podstawie (1.1) normy  $\|\cdot\|'$  oraz  $\|\cdot\|$  są równoważne.  $\square$

**Przykłady**

- (a)
- $A = \{f \in C(\mathbb{D}) : f \text{ – holomorficzna w } \text{int } D\}$
- ,

$$\|f\| = \max\{|f(z)| : |z| = 1\}$$

$A$  nazywamy algebrą dyskową. Funkcja stała równa 1 jest jednością.

- (b)
- $A = \ell^1(\mathbb{Z})$
- . Dla
- $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$
- mamy
- $\|a\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$
- . Określamy mnożenie (splot) wzorem

$$c = a * b, \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

Współczynniki  $c_n$  są dobrze określone bo ciąg  $b_n$  jest ograniczony. Mnożenie jest przemienne. Reguła mnożenia powstała poprzez analogię z mnożeniem szeregów Laurenta w 0.

$$\left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \right) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \right), \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

Sprawdzamy podmultiplikatywność normy.

$$\begin{aligned} \|c\| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| |b_{n-k}| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_{n-k}| = \|a\| \|b\| \end{aligned}$$

czyli  $\|a * b\| \leq \|a\| \|b\|$ . Ciąg  $e = \delta_0(n)$  jest jednością.

**Definicja 1.6.** W algebrze  $A$  z jednością  $e$  element  $x$  nazywamy odwracalnym jeśli istnieje element  $y \in A$  spełniający  $xy = yx = e$ . Element  $y$  nazywamy odwrotnym do  $x$  i oznaczamy symbolem  $x^{-1}$ .

Element odwrotny do  $x$ , o ile istnieje, jest jedyny.

Symbolem  $\mathcal{G}(A)$  oznaczamy grupę elementów odwracalnych w algebrze Banacha  $A$ .

**Twierdzenie 1.7.** Dla algebry Banacha z jednością  $\mathcal{G}(A)$  jest otwartym podzbiorem w  $A$ . Ponadto odwzorowanie  $x \mapsto x^{-1}$  z  $\mathcal{G}(A)$  w siebie jest ciągle.

*Dowód.* Dla  $y \neq 0$  określamy  $y^0 = e$ . Jeśli  $\|y\| < 1$ , to element  $e - y$  jest odwracalny, bo

$$(e - y) \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n (e - y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} y^n = e$$

Zatem jeśli  $\|e - x\| < 1$  to element  $x$  jest odwracalny, bo  $x = e - y$  dla  $y = e - x$ .

$$\|x^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} y^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|y\|^n = \frac{1}{1 - \|y\|} = \frac{1}{1 - \|e - x\|}$$

Założmy, że  $x_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ . Dla  $x \in A$  mamy  $x = x_0(x_0^{-1}x)$ . Wystarczy pokazać, że  $x_0^{-1}x$  jest odwracalny jeśli  $x$  jest dostatecznie blisko  $x_0$ . Mamy

$$\|e - x_0^{-1}x\| = \|x_0^{-1}(x_0 - x)\| \leq \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|$$

Jeśli  $\|x - x_0\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$ , to element  $x_0^{-1}x$  jest odwracalny, co kończy dowód otwartości. Ponadto  $x^{-1} = (x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1}$ . Przy założeniu  $\|x - x_0\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x^{-1}\| &= \|(x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\| \|(x_0^{-1}x)^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|x_0^{-1}\|}{1 - \|e - x_0^{-1}x\|} \leq \frac{\|x_0^{-1}\|}{1 - \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|} \end{aligned}$$

Sprawdzamy ciągłość. Niech  $x, x_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \|x^{-1} - x_0^{-1}\| &= \|x^{-1}(x_0 - x)x_0^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\| \\ &\leq \frac{\|x_0^{-1}\|^2}{1 - \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|} \|x - x_0\| \end{aligned}$$

□

**Definicja 1.8.** Dla elementu  $x \in A$  określamy spektrum

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ jest nieodwracalny}\}$$

Zbiorem rezolwenty dla  $x$  oznaczamy  $\varrho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ , czyli

$$\varrho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ jest odwracalny}\}$$

**Przykłady**

- (a)  $A = M_n(\mathbb{C})$ - macierze kwadratowe wymiaru  $n \times n$  z normą operatorową na  $\mathbb{C}^n$ , z normą euklidesową. Wtedy

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - A) = 0\}$$

czyli  $\sigma(A)$  jest zbiorem wartości własnych.

- (b)  $A = C[0, 1]$ . Dla  $f \in C[0, 1]$  mamy

$$\varrho(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(x) \neq \lambda, 0 \leq x \leq 1\} = \mathbb{C} \setminus f([0, 1])$$

- (c) Algebra dyskowa  $A(\mathbb{D})$ . Dla  $f \in A(\mathbb{D})$  zachodzi  $\sigma(f) = f(\mathbb{D})$ .

**Twierdzenie 1.9.**

- (a) Dla elementu  $x$  algebry Banacha z jednością istnieje granica  $\lim_n \|x^n\|^{1/n}$  oraz

$$\inf_n \|x^n\|^{1/n} = \lim_n \|x^n\|^{1/n} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

- (b)  $\sigma(x)$  jest zwartym i niepustym podzbiorem w  $\mathbb{C}$ .

*Dowód.* Dowód można przeprowadzić podobnie jak dla przestrzeni  $B(X)$ , gdzie  $X$  jest przestrzenią Banacha.  $\square$

Zauważmy, że  $\sigma(x) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|x\|\}$ . Istotnie dla  $|\lambda| > \|x\|$  mamy  $|\lambda^{-1}x| < 1$ , więc element

$$\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$$

jest odwracalny.

**Twierdzenie 1.10.** Dla dowolnych elementów  $x, y$  algebry Banacha z jednością mamy

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$$

**Uwaga.** Wzór  $\sigma(xy) = \sigma(yx)$  nie musi być spełniony. Na przykład rozważmy operator  $S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0)$  określony wzorem

$$S(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$$

Wtedy

$$S^*(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

Mamy  $SS^* = I$  ale  $S^*S$  jest rzutem na  $\delta_0^\perp$ . Zatem  $\sigma(SS^*) = \{1\}$ ,  $\sigma(S^*S) = \{0, 1\}$ .

*Dowód.* Rozważmy liczbę niezerową  $\lambda \notin \sigma(xy)$ . Chcemy pokazać, że  $\lambda \notin \sigma(yx)$ . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że  $\lambda = 1$ . Chcemy znaleźć wzór na  $(e - yx)^{-1}$  za pomocą  $(e - xy)^{-1}$ . Nieformalnie mamy

$$(e - yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (yx)^n = e + y \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \right] x = e + y(e - xy)^{-1}x$$

Sprawdźmy, że faktycznie element  $e + y(e - xy)^{-1}x$  jest odwrotny do  $e - yx$ .

$$\begin{aligned} (e - yx)[e + y(e - xy)^{-1}x] &= e - yx + y(e - xy)^{-1}x - yxy(e - xy)^{-1}x \\ &= e - yx + y[(e - xy)^{-1} - xy(e - xy)^{-1}]x = e - yx + x(e - xy)(e - xy)^{-1}x = e \end{aligned}$$

□

**Wniosek 1.11.** *Nie istnieją elementy  $x, y \in A$  spełniające  $xy - yx = e$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $xy - yx = e$ . Wtedy

$$\sigma(xy) = \sigma(yx + e) = \sigma(yx) + 1$$

Stąd

$$[\sigma(yx) + 1] \cup \{0\} = \sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$$

Oznaczmy  $C = \sigma(yx)$ . Zbiór  $C$  jest niepusty, ograniczony i spełnia  $(C + 1) \cup \{0\} = C \cup \{0\}$ . Otrzymujemy sprzeczność. Rzeczywiście jeśli  $C$  zawiera liczbę niecałkowitą  $c$  lub nieujemną liczbę całkowitą, to  $c + n \in C$  dla wszystkich  $n$ . Zatem  $C$  jest skończonym podzbiorem ujemnych liczb całkowitych. Niech  $c$  oznacza najmniejszą z nich. Wtedy najmniejszą liczbą w  $C + 1$  jest liczba  $c + 1$ , co prowadzi do sprzeczności. □

**Przykład** Dla przestrzeni funkcji różniczkowalnych w przedziale  $[0, 1]$  mamy

$$\frac{d}{dt}(tf) - t\frac{d}{dt}f = f$$

Zatem operatory  $(Mf)(t) = tf(t)$  oraz  $Df = df/dt$  spełniają  $DM - MD = I$ .

**Twierdzenie 1.12** (Gelfand-Mazur). *Jeśli algebra Banacha  $A$  jest pierścieniem z dzieleniem, tzn. każdy niezerowy element jest odwracalny, to  $A$  jest izomorficzna z  $\mathbb{C}$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $A$  jest ciałem. Dla  $a \in A$  mamy  $\sigma(a) \neq \emptyset$ . Niech  $\lambda \in \sigma(a)$ . Tzn. element  $\lambda e - a$  jest nieodwracalny. Stąd  $\lambda e - a = 0$ , czyli  $a = \lambda e$ . Zatem  $A = \mathbb{C}e$ .  $\square$

**Uwaga** Rozważmy algebrę  $A$ , która jest przestrzenią nad ciałem liczb rzeczywistych. Rozważamy kompleksyfikację  $\tilde{A} = A \oplus A$  zadaną poprzez mnożenie

$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') \oplus (xy' + x'y)i$$

Wtedy  $\tilde{A}$  jest algebrą zespoloną, poprzez określenie

$$(0 \oplus i)(x' \oplus y'i) = (-y') \oplus xi$$

Dla każdego element  $x \in A$  jego spektrum w  $\tilde{A}$  jest niepuste, tzn. element  $x - (a + bi)e$  jest nieodwracalny dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wtedy element

$$(x - a)^2 + b^2e = [x - (a + bi)e][x + (a + bi)e]$$

jest nieodwracalny. Zatem

$$(x - a)^2 + b^2e = 0$$

Jeśli  $b = 0$ , to  $x = a$ . W przeciwnym wypadku

$$\frac{x - ae^2}{b} + e = 0$$

Równanie  $x^2 + e = 0$  ma dwa rozwiązania. Rzeczywiście, jeśli  $x^2 + e = y^2 + e = 0$ , to

$$(x - y)(x + y) = 0$$

W ostatnim wzorze wykorzystaliśmy przemienność algebry. Uzyskujemy  $x = y$  lub  $x = -y$ . Oznaczmy symbolem  $f$  jedno z tych rozwiązań. Wtedy

$$\frac{x - ae}{b} = \pm f$$

stąd  $x = ae \pm bf$ . Zatem  $A \cong \mathbb{C}$ , albo  $A \equiv \mathbb{R}$ , o ile  $b = 0$  dla każdego elementu  $x \in A$ .

**Definicja 1.13.** Podprzestrzeń  $I$  w algebrze  $A$  nazywamy prawostronnym (odpowiednio lewostronnym) ideałem, jeśli  $ab \in I$  (odpowiednio  $ba \in I$ ) dla wszystkich  $a \in A$  oraz  $b \in I$ . Podprzestrzeń nazywamy ideałem dwustronnym, jeśli jest ideałem zarówno prawo jak i lewostronnym.



**Przykłady**

- (a) Dla algebry dyskowej podprzestrzeń

$$I = \{f \in A(D) : f(0) = 0\}$$

jest ideałem dwustronnym.

- (b) W algebrze
- $B(\mathcal{H})$
- operatory zwarte, operatory Hilberta-Schmidta oraz operatory śladowe są ideałami dwustronnymi.

- (c) Dla algebry
- $A = \ell^1(\mathbb{Z})$
- podprzestrzeń

$$I = \left\{ (a_n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 0 \right\}$$

jest ideałem dwustronnym. Rzeczywiście, teza wynika ze wzoru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a * b)_n = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \right)$$

**Twierdzenie 1.14.** *Niech  $A$  będzie algebrą Banacha (niekoniecznie z jednością) oraz  $I$  domkniętym ideałem dwustronnym w  $A$ . Wtedy algebra ilorazowa  $A/I$  jest algebrą Banacha z normą*

$$\|[a]\| = \inf_{u \in I} \|a + u\|$$

*Jeśli  $A$  posiada jedność  $e$  oraz  $I \subsetneq A$ , to  $[e]$  jest jednością w  $A/I$  oraz  $\|[e]\| = 1$  o ile  $\|e\| = 1$ .*

*Dowód.* Z kursu Analizy Funkcjonalnej 1 wiemy, że  $A/I$  jest przestrzenią Banacha z normą określoną w treści twierdzenia. Z kursy z algebry wiadomo, że  $A$  jest algebrą z działaniami

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot b], \quad \lambda[a] = [\lambda a]$$

Pozostaje sprawdzić podmultiplikatywność normy. Mamy

$$\begin{aligned} \|[a][b]\| &= \|[ab]\| = \inf_{u \in I} \|ab + u\| \leq \inf_{v, w \in I} \|ab + av + bv + vw\| \\ &= \inf_{v, w \in I} \|(a + v)(b + w)\| \leq \inf_{v, w \in I} \|a + v\| \|b + w\| = \|[a]\| \|[b]\| \end{aligned}$$

Z kursu algebry wiadomo, że jeśli  $e$  jest jednością w  $A$ ,  $I \subsetneq A$ , to  $[e]$  jest jednością w  $A/I$  oraz  $[e] \neq 0$ . Mamy  $\|[e]\| = \inf_{u \in I} \|e + u\| \leq \|e\| = 1$ . Ale  $\|[e]\| \geq 1$ , zatem  $\|[e]\| = 1$ .  $\square$

## 2 Teoria Gelfanda

**Definicja 2.1.** *Ideal  $I$  (lewo, prawo-, dwustronny) nazywamy maksymalnym, jeśli  $I$  jest właściwym podzbiorem  $A$  oraz nie istnieje ideal  $J$  (lewo, prawo-, dwustronny) taki, że  $I \subsetneq J \subsetneq A$ .*

**Twierdzenie 2.2.** *Każdy ideal maksymalny w algebrze Banacha z jednością jest domknięty.*

*Dowód.* Załóżmy, że  $I$  jest ideałem maksymalnym. Wtedy  $I \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$ , czyli  $I \subset A \setminus \mathcal{G}(A)$ . Ponieważ drugi zbiór jest domknięty, to  $I \subset \bar{I} \subset A \setminus \mathcal{G}(A)$ . Zbiór  $\bar{I}$  jest ideałem, więc z maksymalności otrzymujemy  $\bar{I} = I$ .  $\square$

**Definicja 2.3.** *Funkcję  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy homomorfizmem algebry  $A$  w algebrę  $\mathbb{C}$  jeśli  $\varphi$  jest funkcjonałem liniowym oraz  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ .*

**Uwaga.** Dla homomorfizmu  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  zbiór  $\ker \varphi = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$  jest ideałem dwustronnym. Rzeczywiście, jeśli  $\varphi(a) = 0$ , to

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0, \quad \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = 0$$

**Twierdzenie 2.4.** *Każdy homomorfizm algebry Banacha w  $\mathbb{C}$  jest ciągły. Ponadto norma tego odwzorowania liniowego nie przekracza wartości 1.*

*Dowód.* Załóżmy, że  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  jest niezerowym homomorfizmem. Istnieje element  $a$  taki, że  $\varphi(a) \neq 0$ . Jeśli  $A$  ma jedność  $e$ , to  $\varphi(a) = \varphi(e)\varphi(a)$ . Zatem  $\varphi(e) = 1$ . Jeśli  $b$  jest elementem odwracalnym, to

$$1 = \varphi(e) = \varphi(b^{-1}b) = \varphi(b^{-1})\varphi(b)$$

Stąd  $\varphi(b) \neq 0$ . Dla dowolnego elementu  $a \in A$  mamy  $\varphi[a - \varphi(a)e] = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$ . Zatem element  $a - \varphi(a)e$  nie jest odwracalny. Czyli

$$\varphi(a) \in \sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$$

Stąd otrzymujemy  $|\varphi(a)| \leq \|a\|$ , co pociąga ciągłość  $\varphi$  oraz  $\|\varphi\| \leq 1$ .

Jeśli  $A$  nie ma jedności, to rozważamy  $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$  oraz  $\tilde{\varphi}(a \oplus \lambda) = \varphi(a) + \lambda$ . Wtedy  $\tilde{\varphi}$  jest homomorfizmem dla  $\tilde{A}$ . Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}[(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu)] &= \varphi(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu \\ &= \varphi(a)\varphi(b) + \lambda\varphi(b) + \mu\varphi(a) + \lambda\mu \\ &= [\varphi(a) + \lambda][\varphi(b) + \mu] = \tilde{\varphi}(a \oplus \lambda)\tilde{\varphi}(b \oplus \mu) \end{aligned}$$

Z pierwszej części dowodu wynika, że  $\tilde{\varphi}$  jest ciągły zatem  $\varphi = \tilde{\varphi}|_{A \oplus \{0\}}$  też jest ciągły.

Jeśli  $A$  ma jedność,  $\|e\| = 1$  oraz  $\varphi \neq 0$  to,  $\varphi(e) = 1 = \|e\|$ . Zatem  $\|\varphi\| = 1$ .  $\square$

**Definicja 2.5.** Niezerowy homomorfizm algebry Banacha w  $\mathbb{C}$  nazywamy **charakterem**.

**Twierdzenie 2.6** (Gelfand-Mazur). *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy charakterami przemiennej algebry Banacha z jednością a ideałami maksymalnymi tej algebry, poprzez przyporządkowanie charakterowi jego jądra.*

*Dowód.* Rozważmy charakter  $\varphi$ . Niech  $J = \ker \varphi$ . Wtedy  $J$  jest ideałem. Mamy

$$a = [a - \varphi(a)e] + \varphi(a)e \in J \oplus \mathbb{C}e$$

Zatem  $A = J \oplus \mathbb{C}e$ . Stąd  $J$  jest ideałem maksymalnym, bo  $J$  jest podprzestrzenią kowymiary 1.

Odwrotnie, niech  $J$  będzie ideałem maksymalnym. Wtedy  $A/J$  jest algebrą Banacha z jednością. Z maksymalności  $J$  wynika, że  $A/J$  jest ciałem. Rzeczywiście, założmy niewprost, że  $0 \neq [a] \in A/J$  oraz  $[a]$  jest nieodwracalny. Rozważmy  $\tilde{J} = J + aA$ . Wtedy  $\tilde{J}$  jest ideałem oraz  $J \subsetneq \tilde{J}$ , bo  $a \in \tilde{J}$ , ale  $a \notin J$ . Z maksymalności  $J$  otrzymujemy  $\tilde{J} = A = J + aA$ . W szczególności  $e = j + ab$ , dla pewnych elementów  $j \in J$  oraz  $b \in A$ . Zatem  $[e] = [a][b]$ . To oznacza, że element  $[a]$  jest odwracalny w  $A/J$ , co prowadzi do sprzeczności.

Z poprzedniego twierdzenia Gelfanda-Mazura wynika, że  $A/J = \mathbb{C}[e]$ . Rozważmy odwzorowanie

$$A \xrightarrow{j} A/J \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$$

gdzie  $j$  jest odwzorowaniem ilorazowym  $j(a) = [a]$  oraz  $\psi(\lambda[e]) = \lambda$ . Złożenie  $j \circ \varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  jest charakterem oraz  $\ker(j \circ \varphi) = J$ ,  $(j \circ \varphi)(e) = 1$ .

Założmy, że istnieją dwa charaktery  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  takie, że  $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$ . Element  $a - \varphi_1(a)e$  leży w  $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$ . Zatem

$$0 = \varphi_2[a - \varphi_1(a)e] = \varphi_2(a) - \varphi_1(a)$$

Czyli  $\varphi_1 = \varphi_2$ .  $\square$

**Twierdzenie 2.7.** *Każda przemienna algebra Banacha z jednością posiada charakter.*

*Dowód.* Jeśli  $A$  jest ciałem, to  $A = \mathbb{C}e$ . Wtedy  $\lambda e \rightarrow \lambda$  jest charakterem.

Założmy, że  $A$  nie jest ciałem. Dla niezerowego elementu nieodwracalnego  $a \in A$  zbiór  $aA$  jest ideałem właściwym, bo  $e \notin aA$ . Rozważmy rodzinę wszystkich właściwych ideałów zawierających  $aA$ . Rodzina jest niepusta i uporządkowana przez inkluzję. Rozważmy łańcuch w tej rodzinie. Żaden z ideałów łańcucha nie zawiera  $e$ , zatem suma mnogościowa łańcucha (która jest ideałem) również nie zawiera  $e$ . To oznacza, że każdy łańcuch jest ograniczony (przez sumę mnogościową ideałów łańcucha). Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że rodzina zawiera element maksymalny.  $\square$

**Wniosek 2.8.** *W przemiennej algebrze Banacha z jednością element  $a$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\varphi(a) \neq 0$  dla każdego charakteru  $\varphi$  algebry.*

*Dowód.* ( $\Leftarrow$ )

Z dowodu poprzedniego twierdzenia wynika, że dla elementu nieodwracalnego  $a$  ideał  $aA$  jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym  $I$ . Niech  $\varphi$  oznacza charakter odpowiadający ideałowi  $I$ , tzn.  $\ker \varphi = I$ . Wtedy  $\varphi(a) = 0$ . ( $\Rightarrow$ )

Jeśli  $a$  jest odwracalny, to dla dowolnego charakteru  $\varphi$  mamy

$$1 = \varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1})$$

Zatem  $\varphi(a) \neq 0$ .  $\square$

**Uwaga.** Algebra nieprzemienna może nie mieć charakterów. Np. niech  $A = M_n(\mathbb{C})$  tworzy algebrę z naturalnymi działaniami i normą operatorową  $\|A\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ . Wtedy  $\|I\| = 1$ . Niech  $e_{ij}$  oznacza macierz z wyrazem równym 1 na przecięciu  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumnie, i zerowymi wyrazami w pozostałych miejscach. Wtedy

$$e_{ij}e_{ij} = 0, \quad e_{ij}e_{ji} = e_{ii}, \quad i \neq j$$

Dla charakteru  $\varphi$  otrzymujemy

$$0 = \varphi(e_{ij}e_{ij}) = \varphi(e_{ij})^2 \implies \varphi(e_{ij}) = 0, \quad i \neq j$$

Zatem

$$\varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{ji})\varphi(e_{ij}) = 0, \quad i \neq j = 0$$

Otrzymujemy

$$1 = \varphi(I) = \varphi(e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn}) = \varphi(e_{11}) + \varphi(e_{22}) + \dots + \varphi(e_{nn}) = 0$$

co prowadzi do sprzeczności.

### Przykład

Rozważmy  $A = \ell^1(\mathbb{Z})$  ze splotem. Chcemy wyznaczyć wszystkie charaktery dla  $A$ . Dla  $\delta_n(k) = \delta_{n,k}$  mamy  $\delta_n * \delta_m = \delta_{n+m}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Rzeczywiście

$$(\delta_n * \delta_m)(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_n(k)\delta_m(l-k) = \begin{cases} 0 & n \neq l-m \\ 1 & n = l-m \end{cases} = \begin{cases} 0 & l \neq n+m \\ 1 & l = n+m \end{cases}$$

W szczególności  $\delta_1^{*n} = \delta_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Element  $\delta_0$  jest jednością, bo

$$(a * \delta_0)(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)\delta_0(l-k) = a_l$$

czyli  $a * \delta_0 = a$ . Wzór wynika też z  $\delta_n * \delta_0 = \delta_n$ . Ponieważ  $\delta_1 * \delta_{-1} = \delta_0$ , to  $(\delta_1)^{-1} = \delta_{-1}$ . Stąd  $(\delta_1)^n = \delta_n$  dla  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Rozważmy charakter  $\varphi$  na  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Wtedy

$$\varphi(\delta_n) = \varphi((\delta_1)^{*n}) = [\varphi(\delta_1)]^n, \quad n \neq 0$$

Oznaczmy  $\lambda = \varphi(\delta_1)$ . Wtedy  $\varphi(\delta_n) = \lambda^n$  dla  $n \neq 0$ . Wiemy, że  $\|\varphi\| = 1$ . Zatem

$$|\lambda^n| \leq \|\varphi\| \|\delta_n\|_1 = 1, \quad n \neq 0$$

W szczególności dla  $n = \pm 1$  otrzymujemy  $|\lambda| \leq 1$  oraz  $|\lambda|^{-1} \leq 1$ , czyli  $|\lambda| = 1$ . To oznacza, że  $\lambda = e^{it}$  dla pewnej liczby  $0 \leq t < 2\pi$ . *Inne wyjaśnienie:* dla  $|\lambda| \neq 1$  element  $\delta_1 - \lambda\delta_0$ . Rzeczywiście dla  $\lambda = 0$  mamy  $\delta_1 * \delta_{-1} = \delta_0$ . Dalej, dla  $\lambda \neq 0$  mamy

$$\delta_1 - \lambda\delta_0 = -\lambda(\delta_0 - \lambda^{-1}\delta_1) = \delta_1 * (\delta_0 - \lambda\delta_{-1})$$

Zatem dla  $|\lambda| > 1$  z pierwszej równości wynika odwracalność. Z kolei druga równość pociąga odwracalność dla  $|\lambda| < 1$ . Reasumując  $\varphi(\delta_n) = e^{int}$  dla

$n \in \mathbb{Z}$ . Dla  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$  mamy  $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_n$ , przy czym szereg jest zbieżny w przestrzeni  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Ponieważ każdy charakter jest ciągły, to

$$\varphi(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(\delta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

Można sprawdzić, że dla każdej wartości  $0 \leq t < 2\pi$

$$\varphi_t(a) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

jest charakterem. Rzeczywiście  $\varphi_t$  jest ciągłym funkcjonałem liniowym, bo  $|\varphi_t(a)| \leq \|a\|_1$ . Mamy

$$a * b = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) \delta_n$$

Zatem

$$\varphi_t(a * b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} b_{n-k} e^{i(n-k)t} \right)$$

Ponieważ podwójny szereg jest bezwzględnie zbieżny, to można zmienić kolejność sumowania. Otrzymamy

$$\varphi_t(a * b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{n-k} e^{i(n-k)t} \right) = \varphi_t(a) \varphi_t(b)$$

Z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa przestrzeń kombinacji liniowych funkcji  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tworzy gęstą podalgebrę  $A$  w  $C_{\text{per}}[0, 2\pi]$  w normie jednostajnej. W szczególności ta przestrzeń jest gęsta w  $C_{\text{per}}[0, 2\pi]$  w normie  $L^2(0, 2\pi)$ , bo  $\|f\|_2 \leq \|f\|_2$  dla  $f \in C_{\text{per}}[0, 2\pi]$ . Ponieważ  $C_{\text{per}}[0, 2\pi]$  jest gęsta w  $L^2(0, 2\pi)$ , to przez przechodność przestrzeni kombinacji liniowych funkcji  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  jest gęsta w  $L^2(0, 2\pi)$ . Układ  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  jest ortonormalny w  $L^2(0, 2\pi)$ , bo

$$\begin{aligned} \langle e^{int}, e^{imt} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \begin{cases} 1 & n = m \\ \frac{1}{2\pi i(n-m)} e^{i(n-m)t} \Big|_0^{2\pi} & n \neq m \end{cases} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem układ ten jest bazą ortonormalną w  $L^2(0, 2\pi)$ .

**Twierdzenie 2.9** (Wiener). *Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą o okresie  $2\pi$ , dla której szereg Fouriera, czyli  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$  jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli  $f(t) \neq 0$  dla wszystkich wartości  $t$ , to szereg Fouriera funkcji  $1/f$  jest też bezwzględnie zbieżny.*

*Dowód.* Dla funkcji  $f$  współczynniki  $\hat{f}(n)$  są określone wzorem

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = \langle f, e^{int} \rangle_{L^2(0,2\pi)}$$

Z założenia liczby  $a_n := \hat{f}(n)$  spełniają  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Tzn.  $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  leży w  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Zatem szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

jest jednostajnie zbieżny i jego suma jest funkcją ciągłą o okresie  $2\pi$ . Otrzymujemy

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

przy czym równość jest punktowa (nie tylko w  $L^2(0, 2\pi)$ ), bo szereg jest jednostajnie zbieżny a funkcja  $f$  jest ciągła o okresie  $2\pi$ . Założenie  $f(t) \neq 0$ , dla  $0 \leq t < 2\pi$ , oznacza, że  $\varphi(a) \neq 0$  dla każdego charakteru algebry  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Zatem element  $a$  jest odwracalny w  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Czyli istnieje ciąg  $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$  taki, że  $a * b = \delta_0$ . Wtedy

$$1 = \varphi_t(a * b) = \varphi_t(a)\varphi_t(b) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int} \right) = f(t)g(t)$$

gdzie  $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$ . Z jednostajnej zbieżności szeregu wnioskujemy, że  $\hat{g}(n) = b_n$ . □

Twierdzenie Banacha-Alaoglu mówi, że kula jednostkowa przestrzeni  $A^*$  (sprzężonej do  $A$ ) jest zwarta w  $*$ -słabej topologii. Jeśli przestrzeń  $A$  jest ośrodkowa, to  $*$ -słaba topologia na kuli jednostkowej jest metryzowalna. Wtedy zwartość oznacza, że każdy ciąg zawiera podciąg  $*$ -słabo zbieżny.

**Definicja 2.10.** *Spektrum algebry Banacha  $A$  nazywamy zbiór wszystkich charakterów algebry  $A$  i oznaczamy symbolem  $Sp(A)$ .*

**Twierdzenie 2.11.** *Dla algebry Banacha z jednością  $Sp(A)$  jest domkniętym podzbiorem kuli jednostkowej w  $*$ -słabej topologii (sfery jednostkowej jeśli  $\|e\| = 1$ ). W szczególności spektrum  $Sp(A)$  jest zwarte w  $*$ -słabej topologii.*

*Dowód.* Charaktery są funkcjonalami liniowymi o normie nie przekraczającej 1. Stąd  $Sp(A) \subset A_1^*$ . Sprawdzamy domkniętość. Użyjemy ciągów uogólnionych. Niech  $\varphi_\alpha \in Sp(A)$  będzie ciągiem uogólnionym zbieżnym  $*$ -słabo do  $\varphi$ . To oznacza z definicji, że dla dowolnego elementu  $x \in A$  mamy  $\varphi_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha} \varphi(x)$ . Wiemy, że wtedy  $\varphi \in A_1^*$ . Trzeba sprawdzić, że  $\varphi$  jest charakterem. Dla  $x, y \in A$  mamy

$$\varphi(xy) \xleftarrow{\alpha} \varphi_\alpha(xy) = \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y) \xrightarrow{\alpha} \varphi(x)\varphi(y)$$

czyli  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ . Skorzystaliśmy z faktu, że jeśli ciągi uogólnione liczb  $t_\alpha$  oraz  $s_\alpha$  są zbieżne do  $t$  i  $s$ , to ciąg uogólniony  $t_\alpha s_\alpha$  jest zbieżny do  $ts$  (zadanie). Ponadto  $\varphi(e) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(e) = 1$ . Zatem  $\varphi \neq 0$ .

Następujący dowód nie korzysta z ciągów uogólnionych. Niech  $\varphi \in A_1^* \setminus Sp(A)$ . Tzn.  $\varphi = 0$  lub  $\varphi$  nie jest funkcjonalem multiplikatywnym. Rozważmy drugi przypadek. Wtedy istnieją elementy  $a, b \in A$  takie, że  $\varphi(ab) \neq \varphi(a)\varphi(b)$ . Dla liczby  $\varepsilon > 0$  zbiór

$$U_\varepsilon = \{\psi \in A^* : |\psi(a) - \varphi(a)| < \varepsilon, |\psi(b) - \varphi(b)| < \varepsilon, |\psi(ab) - \varphi(ab)| < \varepsilon\}$$

jest otoczeniem funkcjonału  $\varphi$  w  $A^*$  w  $*$ -słabej topologii. Wtedy  $U_\varepsilon \cap A_1^*$  jest otoczeniem  $\varphi$  w  $A_1^*$ . Jeśli  $\varepsilon > 0$  jest dostatecznie małe, to  $\psi(ab) \neq \psi(a)\psi(b)$ . Zatem  $[U_\varepsilon \cap (A^*)_1] \cap Sp(A) = \emptyset$ .

Dla  $\varphi = 0$  rozważamy

$$V = \left\{ \psi \in A_1^* : |\psi(e)| < \frac{1}{2} \right\}$$

Zbiór  $V$  jest otoczeniem  $\varphi = 0$ . Otrzymujemy  $\psi(e) \neq 1$ , zatem  $V \cap Sp(A) = \emptyset$ .  $\square$

**Uwaga.** Zbiór  $Sp(A)$  jest przestrzenią Hausdorffa w  $*$ -słabej topologii na  $A_1^*$ , bo  $A_1^*$  jest przestrzenią Hausdorffa w tej topologii.

Niech  $C(Sp(A))$  oznacza algebrę ciągłych zespolonych funkcji na  $Sp(A)$ .



**Twierdzenie 2.12.** *Niech  $A$  będzie przemienną algebrą Banacha z jednością. Dla elementu  $x \in A$  określamy funkcję  $\hat{x} : Sp(A) \rightarrow \mathbb{C}$  wzorem  $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ . Wtedy  $\hat{x}(Sp(A)) = \sigma(x)$ . Ponadto funkcja  $\hat{x}$  jest ciągła oraz odwzorowanie  $\hat{\cdot} : A \rightarrow C(Sp(A))$  jest homomorfizmem algebr Banacha oraz  $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ . Odwzorowanie  $\hat{\cdot}$  nazywamy transformatą Gelfanda.*

*Dowód.* Niech  $\varphi \in Sp(A)$ . Wtedy  $\varphi(x) \in \sigma(x)$ , bo  $\varphi(x - \varphi(x)e) = 0$ , czyli element  $x - \varphi(x)e = x - \hat{x}(\varphi)e$  nie jest odwracalny. Zatem  $\hat{x}(\varphi) \in \sigma(x)$  co pociąga  $\hat{x}(Sp(A)) \subseteq \sigma(x)$ . Dla dowodu odwrotnego zawierania, niech  $\lambda \in \sigma(x)$ , tzn. element  $x - \lambda e$  nie jest odwracalny. Wtedy istnieje charakter  $\varphi \in Sp(A)$ , dla którego  $\varphi(x - \lambda e) = 0$ . Tzn.  $\lambda = \varphi(x) = \hat{x}(\varphi)$ , czyli  $\lambda \in \hat{x}(Sp(A))$ . Otrzymujemy więc  $\sigma(x) \subseteq \hat{x}(Sp(A))$ .

Odwzorowanie  $\hat{\cdot} : x \mapsto \hat{x}$  jest liniowe z określenia  $\hat{\cdot}$ . Ponadto

$$\widehat{xy}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi)$$

czyli  $\hat{\cdot}$  jest homomorfizmem.

Pozostaje uzasadnić ciągłość funkcji

$$\hat{x} : Sp(A) \rightarrow \mathbb{C}$$

Własność wynika z określenia topologii na  $Sp(A)$ . Niech  $\varphi_\alpha \xrightarrow{\alpha} \varphi$  \*-słabo, gdzie  $\varphi_\alpha, \varphi \in Sp(A)$ . Zatem

$$\hat{x}(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha} \varphi(x) = \hat{x}(\varphi), \quad x \in A$$

To oznacza ciągłość funkcji  $\hat{x}$  na  $Sp(A)$ .

Bez użycia ciągów uogólnionych: ustalmy  $x \in A$ . Sprawdzamy ciągłość  $\hat{x}$  w punkcie  $\varphi \in Sp(A)$ . Dla  $\varepsilon > 0$  określamy

$$U_\varepsilon = \{\psi \in Sp(A) : |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\}$$

Wtedy  $U_\varepsilon$  jest otoczeniem punktu  $\varphi$  w \*-słabej topologii na  $Sp(A)$ . Dla  $\psi \in U_\varepsilon$  mamy

$$|\hat{x}(\psi) - \hat{x}(\varphi)| = |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

□

**Przykład** Rozważmy  $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ . Charaktery mają postać

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Oznaczmy  $\lambda = e^{it}$ . Tzn.

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow{\varphi_\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad |\lambda| = 1$$

Zatem  $Sp(A) = \mathbb{T}$  jako zbiory. Pokażemy, że  $Sp(A) = \mathbb{T}$  jako przestrzenie topologiczne. Rozważmy  $\delta_1$ . Wtedy  $\hat{\delta}_1 : Sp(A) \xrightarrow{na} \mathbb{T}$ , bo  $\hat{\delta}_1(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(\delta_1) = \lambda$ . Funkcja  $\hat{\delta}_1$  jest ciągłym różnowartościowym odwzorowaniem z  $Sp(A)$  na  $\mathbb{T}$ . Zatem  $\hat{\delta}_1$  jest homeomorfizmem. Dla ustalonego ciągu  $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  odwzorowanie  $\hat{a}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n$  jest transformatą Gelfanda elementu  $a$ .

### 3 Rachunek symboliczny w algebrze Banacha

Twierdzenie Wienera można zinterpretować w następujący sposób: w przemiennej algebrze Banacha jeśli dla  $x \in A$  funkcja  $\hat{x}$  nie zeruje się, to element  $x$  jest odwracalny. Tzn. na element  $x$  możemy nałożyć funkcję  $z \mapsto z^{-1}$ . Naszym celem jest określenie działania na elementach algebry większej klasy funkcji ciągłych

Rozważmy funkcję ciągłą  $\alpha : [a, b] \rightarrow A$  tzn. dla  $a \leq t_0 \leq b$  i  $\varepsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $|t - t_0| < \delta$ , to  $\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| < \varepsilon$ . Można udowodnić, że każda funkcja ciągła jest jednostajnie ciągła (zadanie). Dla podziału  $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  przedziału  $[a, b]$  wybieramy punkty pośrednie  $t_{j-1} \leq s_j \leq t_j$  i określamy sumy

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^n \Delta t_j f(s_j)$$

gdzie  $f : [a, b] \rightarrow A$ . Celem jest określenie całki  $\int_a^b f(t) dt$ . Symbolem  $d(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j$  oznaczamy średnicę podziału.

**Lemat 3.1.** *Dla dwu podziałów  $\mathcal{P}_1$  i  $\mathcal{P}_2$  spełniających  $d(\mathcal{P}_1) < \delta$  oraz  $d(\mathcal{P}_2) < \delta$  mamy*

$$\|S(\mathcal{P}_1, f) - S(\mathcal{P}_2, f)\| \leq 2(b-a) \sup_{|t-s| < \delta} \|f(t) - f(s)\|$$

*Dowód.* Niech  $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , z punktami pośrednimi typu prawy koniec. Wtedy

$$\|S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_2)\| \leq \|S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_3)\| + \|S(\mathcal{P}_3) - S(\mathcal{P}_2)\|$$

Pokażemy, że

$$\|S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_3)\| \leq (b-a) \sup_{|t-s|<\delta} \|f(t) - f(s)\|$$

Punkty  $\{t_{j,k}\}_{k=0}^{k_j}$  oznaczają punkty podziału  $\mathcal{P}_3$  stanowiące podział przedziału  $[t_{j-1}, t_j]$ . Mamy

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_3) &= \sum_{j=1}^n \Delta t_j f(s_j) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \Delta t_{j,k} f(t_{j,k}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \Delta t_{j,k} [f(s_j) - f(t_{j,k})] \end{aligned}$$

bo  $\sum_{k=1}^{k_j} \Delta t_{j,k} = \Delta t_j$ . Ponieważ  $s_j, t_{j,k} \in [t_{j-1}, t_j]$ , to

$$\|f(s_j) - f(t_{j,k})\| \leq \sup_{|t-s|<\delta} \|f(t) - f(s)\|$$

Stąd wynika oszacowanie. Podobnie otrzymujemy

$$\|S(\mathcal{P}_3) - S(\mathcal{P}_2)\| \leq (b-a) \sup_{|t-s|<\delta} \|f(t) - f(s)\|$$

□

**Wniosek 3.2.** Załóżmy, że funkcja  $f : [a, b] \rightarrow A$  jest ciągła. Niech  $\mathcal{P}_n$  oznacza ciąg podziałów takich, że  $d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$ . Wtedy ciąg  $S(\mathcal{P}_n)$  jest zbieżny.

*Dowód.* Z lematu ciąg  $S(\mathcal{P}_n)$  spełnia warunek Cauchy'ego, bo

$$\|S(\mathcal{P}_n, f) - S(\mathcal{P}_m, f)\| \leq 2(b-a) \sup_{|t-s| \leq \max\{d(\mathcal{P}_n), d(\mathcal{P}_m)\}} \|f(t) - f(s)\|$$

□

**Definicja 3.3.** Dla funkcji ciągłej  $f : [a, b] \rightarrow A$  określamy

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_n S(\mathcal{P}_n, f), \quad d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$$

Całka spełnia:

$$(a) \int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$(b) \int_a^b [\lambda f(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

$$(c) \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt, \quad a < c < b.$$

$$(d) \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

**Lemat 3.4.** Dla  $\varphi \in A^*$  mamy

$$\varphi \left( \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt$$

*Dowód.* Dla ciągu podziałów  $\mathcal{P}_n$  takich, że  $d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$  otrzymujemy

$$\varphi \left( \int_a^b f(t) dt \right) = \lim_n \varphi(S(\mathcal{P}_n, f)) = \lim_n S(\mathcal{P}_n, \varphi \circ f) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt$$

□

Dla krzywej zorientowanej  $C$  klasy  $C^1$  w płaszczyźnie  $\mathbb{C}$  i funkcji ciągłej  $f : C \rightarrow A$  określamy

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, \quad \gamma : [a, b] \rightarrow C \subset \mathbb{C}$$

Całka nie zależy od wyboru parametryzacji  $\gamma(t)$ , bo po nałożeniu funkcjonału  $\varphi \in A^*$  tak jest (zadanie). Ponadto (zadanie)

$$\varphi \left( \int_C f(z) dz \right) = \int_C \varphi(f(z)) dz$$

Całkę wzdłuż krzywej  $C$  możemy określić, gdy krzywa  $C$  jest ciągła, kawałkami klasy  $C^1$ , poprzez sumę całek wzdłuż fragmentów krzywej.

**Definicja 3.5.** Niech  $f(z)$  będzie funkcją o wartościach w algebrze Banacha  $A$ , określoną na otwartym obszarze  $U \subset \mathbb{C}$ . Mówimy, że funkcja  $f$  jest holomorficzna jeśli  $f(z)$  posiada pochodną zespoloną w każdym punkcie obszaru  $U$ , tzn. istnieją granice

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad z \in U$$

**Przykład** Rozważmy algebrę Banacha  $A$  z jednością. Ustalmy  $a \in A$ . wtedy funkcja  $z \mapsto (ze - a)^{-1}$  dla  $z \notin \sigma(a)$  jest holomorficzna. Rzeczywiście, gdy  $w \rightarrow z$ , to  $(we - a)^{-1} \rightarrow (ze - a)^{-1}$  oraz

$$(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1} = -(w - z)(we - a)^{-1}(ze - a)^{-1}$$

Stąd

$$\frac{(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1}}{w - z} = -(we - a)^{-1}(ze - a)^{-1}$$

zatem

$$\frac{d}{dz}(ze - a)^{-1} = -(ze - a)^{-2}$$

Skorzystaliśmy z ciągłości funkcji  $w \mapsto (we - e)^{-1}$ . Ta własność wynika ze złożenia funkcji ciągłych

$$w \mapsto we - a \mapsto (we - a)^{-1}$$

**Twierdzenie 3.6.** Niech  $C$  będzie prostą krzywą zamkniętą w  $\mathbb{C}$ . Załóżmy, że funkcja  $f(z)$  o wartościach w  $A$  jest określona i holomorficzna w obszarze otwartym  $U$  zawierającym krzywą  $C$  oraz obszar ograniczony przez tę krzywą. Wtedy

$$\int_C f(z) dz = 0$$

*Dowód.* Dla  $\varphi \in A^*$  mamy

$$\varphi \left( \int_C f(z) dz \right) = \int_C \varphi(f(z)) dz = 0$$

Ponieważ  $\varphi$  jest dowolnym funkcjonałem na  $A$ , to  $\int_C f(z) dz = 0$ .  $\square$

**Wniosek 3.7.** Niech  $U \subset \mathbb{C}$  będzie spójnym obszarem ograniczonym, którego brzeg składa się ze skończonej liczby prostych krzywych zamkniętych. Dla funkcji  $f(z)$  holomorficznej w obszarze  $V$  zawierającym  $\bar{U}$  mamy

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 0$$

*Dowód.* Obszar  $U$  możemy podzielić na skończoną liczbę obszarów jednospójnych  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . Wtedy

$$\int_{\partial U} f(z) dz = \int_{\partial U_1} f(z) dz + \int_{\partial U_2} f(z) dz + \dots + \int_{\partial U_n} f(z) dz = 0$$

□

Dla algebry Banacha z jednością możemy określić  $p(a)$ , gdzie  $p(z)$  jest wielomianem. Wtedy  $(p_1 p_2)(a) = p_1(a) p_2(a)$ . Można rozważyć funkcję całkowitą  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  i zdefiniować  $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ . Szereg jest absolutnie zbieżny, bo  $\lim_n |c_n|^{1/n} = 0$ . Zatem  $\|c_n a^n\| \leq |c_n| \|a\|^n$ . Więc  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \|a\|^n < \infty$ . Wystarczy, aby

$$\limsup |c_n|^{1/n} < \frac{1}{\|a\|}$$

Jeśli  $f(z)$  i  $g(z)$  są holomorficzne w obszarze otwartym  $U$  zawierającym koło  $\{z : |z| \leq \|a\|\}$  to  $(fg)(a) = f(a)g(a)$  w oparciu o mnożenie Cauchy'ego szeregów potęgowych.

**Przykład.** Niech  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Załóżmy, że  $A$  sprowadza się do postaci diagonalnej, tzn.  $A = CDC^{-1}$ , gdzie  $D$  jest macierzą diagonalną z wyrazami  $\{d_k\}_{k=1}^n$  na przekątnej. Dla  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  możemy określić  $f(D)$  jako macierz diagonalną z wyrazami  $\{f(d_k)\}_{k=1}^n$  na przekątnej. Niech  $f(A) = Cf(D)C^{-1}$ . Wtedy  $(fg)(A) = f(A)g(A)$ , bo

$$f(A)g(A) = Cf(D)C^{-1}Cg(D)C^{-1} = Cf(D)g(D)C^{-1} = C(fg)(D)C^{-1} = (fg)(A)$$

Dla  $f \equiv 1$  mamy  $f(A) = Cf(D)C^{-1} = CC^{-1} = I$ . Z kolei dla  $f(z) = z$  zachodzi  $f(A) = CDC^{-1} = A$ . Funkcja  $f$  nie musi być określona na  $\mathbb{C}$ . Wystarczy, że znamy jej wartości na  $\{d_k\}_{k=1}^n$ , czyli na  $\sigma(A)$ .

**Twierdzenie 3.8.** Niech  $C$  będzie prostą krzywą zamkniętą, kawałkami  $C^1$ , obiegającą w kierunku dodatnim  $\sigma(a)$  dla elementu  $a \in A$ , lub skończoną sumą

takich krzywych, przy czym obszary otoczone przez te krzywe są rozłączne. Wtedy

$$e = \frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz$$

**Uwaga** Wzór jest podobny do wzoru Cauchy'ego

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - z_0}$$

gdzie liczba  $z_0$  leży wewnątrz  $C$ .

*Dowód.* Rozważmy przypadek  $C = C_1 \cup C_2$ . Tzn.  $\sigma(a)$  jest zawarte w dwu obszarach otwartych otoczonych przez te krzywe. Niech  $C_R$  oznacza okrąg o środku w 0 i promieniu tak dużym, że krzywa  $C$  leży wewnątrz koła o promieniu  $R$ . W obszarze otwartym  $U$  zawartym pomiędzy  $C$  i  $C_R$  funkcja  $z \mapsto (ze - a)^{-1}$  jest holomorficzna, bo obszar jest oddzielony od  $\sigma(a)$ . Zatem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} (ze - a)^{-1} dz = 0$$

Stąd

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} (ze - a)^{-1} dz$$

Można przyjąć, że  $R > \|a\|$ . Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} (ze - a)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} a^n dz$$

Szereg jest zbieżny jednostajnie na  $C_R$  zatem w drugiej całce można zmienić kolejność całki z sumowaniem. Otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} z^{-n-1} dz \right] a^n = e$$

Skorzystaliśmy z faktu, że jeśli  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  dla  $z \in C$ , to

$$\int_C f_n(z) dz \rightarrow \int_C f(z) dz$$

dla funkcji ciągłych  $f_n, f : C \rightarrow A$ .

□

**Wniosek 3.9.** *Przy założeniach poprzedniego twierdzenia, dla funkcji całkowitej  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  spełniony jest wzór*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1} dz$$

gdzie  $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ .

*Dowód.* Wystarczy udowodnić wzór dla wielomianu  $p_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^n$  i tezę uzyskać przez przejście graniczne, gdy  $N \rightarrow \infty$ . Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C p_N(z)(ze - a)^{-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C [p_N(z)e - p_N(a)](ze - a)^{-1} dz \\ &\quad + p_N(a) \frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz \end{aligned}$$

Funkcja  $[p_N(z)e - p_N(a)](ze - a)^{-1}$  jest wielomianem zmiennej  $z$  ze współczynnikami z algebry  $A$ , związaną z wielomianem  $z \mapsto \frac{p_N(z) - p_N(w)}{z - w}$ . Zatem po uproszczeniu, pierwsza całka jest równa 0.  $\square$

**Definicja 3.10.** *Niech  $f(z)$  będzie funkcją holomorficzną w obszarze otwartym  $U$ , złożonym ze skończonej liczby obszarów jednospójnych, zawierającym  $\sigma(a)$ . Dla  $C$  prostej krzywej zamkniętej, kawałkami  $C^1$  (lub skończonej sumy takich krzywych) obiegającej w kierunku dodatnim zbiór  $\sigma(a)$  i dla elementu  $a \in A$  określmy*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1} dz$$

**Uwaga.** Definicja  $f(a)$  nie zależy od wyboru krzywej  $C$ . Rzeczywiście niech  $C_R$  będzie okręgiem o promieniu  $R$  takim, że krzywa  $C$  leży w otwartym kole o promieniu  $R$ . Wtedy funkcja  $f(z)(ze - a)^{-1}$  jest holomorficzną w obszarze pomiędzy  $C$  i  $C_R$ . Zatem całka wzdłuż brzegu obszaru wynosi 0, czyli całki wzdłuż  $C$  i  $C_R$  są równe.



**Uwaga.** Można określić  $f(a)$ , gdy  $U$  składa się ze skończonej liczby obszarów spójnych, ale niekoniecznie jednospójnych. Np. wzór

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz = e$$

jest spełniony. Rzeczywiście jeśli krzywa  $C$  nie zawiera wewnątrz punktów z  $\sigma(a)$ , to całka wzdłuż  $C$  jest równa 0, bo funkcja  $z \mapsto (ze - a)^{-1}$  jest holomorphyzna w obszarze otwartym ograniczonym przez  $C$ .

**Twierdzenie 3.11.** *Jeśli funkcje  $f(z)$  i  $g(z)$  są holomorphyczne w otoczeniu  $\sigma(a)$ , to*

$$f(a)g(a) = (fg)(a)$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy dla przypadku, gdy  $f$  i  $g$  są holomorphyczne w otwartym obszarze jednospójnym zawierającym  $\sigma(a)$ .

Wyberzmy krzywe (być może skończone sumy krzywych)  $C_1$  i  $C_2$  otaczające  $\sigma(a)$  takie, że  $C_1$  leży w obszarze otwartym ograniczonym przez  $C_2$ . Wtedy

$$\begin{aligned} f(a)g(a) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z)(ze - a)^{-1} dz \cdot \int_{C_2} g(w)(we - a)^{-1} dw \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z) \left[ \int_{C_2} g(w)(ze - a)^{-1}(we - a)^{-1} dw \right] dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z) \left[ \int_{C_2} \frac{g(w)}{z - w} [(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1}] dw \right] dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z)(ze - a)^{-1} \left[ \int_{C_2} \frac{g(w)}{w - z} dw \right] dz \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_{C_2} g(w)(we - a)^{-1} \left[ \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - w} dz \right] dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z)g(z)(ze - a)^{-1} dz = (fg)(a) \end{aligned}$$

bo  $\int_{C_1} f(z)(z-w)^{-1} dz = 0$ . Zmianę kolejności całkowania można uzasadnić poprzez nałożenie funkcjonału  $\varphi \in A^*$ . Otrzymujemy wtedy całki z funkcji o wartościach w  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Niech  $H(a)$  oznacza rodzinę funkcji holomorficzných w otoczeniu  $\sigma(a)$ . Wtedy  $H(a)$  tworzy algebrę. Odwzorowanie  $H(a) \ni f \mapsto f(a) \in A$  jest homomorfizmem algebr. Ponadto  $1 \mapsto e$  oraz  $z \mapsto a$ .

**Twierdzenie 3.12.** *Dla elementu  $a \in B$  algebry Banacha oraz  $f \in H(a)$  mamy  $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda \in \sigma(a)$ . Dla  $f \in H(a)$  funkcja

$$g_\lambda(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & z = \lambda \end{cases}$$

należy do  $H(a)$  oraz  $(z - \lambda)g_\lambda(z) = f(z) - f(\lambda)$ . Zatem

$$(a - \lambda e)g_\lambda(a) = f(a) - f(\lambda)e$$

Stąd element  $f(a) - f(\lambda)e$  nie jest odwracalny, czyli  $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$ .

Założmy teraz, że  $\mu \notin f(\sigma(a))$ . Wtedy  $g(z) := (\mu - f(z))^{-1} \in H(a)$ . Ze wzoru  $g(z)(\mu - f(z)) = 1$  otrzymujemy

$$g(a)(\mu e - f(a)) = e$$

Zatem  $\mu \notin \sigma(f(a))$ .  $\square$

**Fakt 3.13.** *Niech  $A$  będzie przemenną algebrą Banacha z jednością. Dla  $a \in A$ ,  $\varphi \in Sp(A)$  oraz  $f \in H(a)$  mamy  $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ . To oznacza, że*

$$\widehat{f(a)} = f \circ \widehat{a}$$

*Dowód.* Mamy

$$\begin{aligned} \varphi(f(a)) &= \varphi \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\varphi((ze - a)^{-1}) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \varphi(a)} dz = f(\varphi(a)) \end{aligned}$$

bo  $\varphi(ze - a) = z - \varphi(a)$  oraz z multiplikatywności otrzymujemy

$$\varphi((ze - a)^{-1}) = \frac{1}{z - \varphi(a)} \quad z \in C$$

□

**Twierdzenie 3.14** (Wiener-Lévy). *Załóżmy, że funkcja o okresie  $2\pi$  ma absolutnie zbieżny szereg Fouriera, tzn.  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  oraz  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ . Niech  $h(z)$  będzie funkcją holomorficzną w otwartym otoczeniu zbioru wartości funkcji  $f$ . Wtedy szereg Fouriera funkcji  $h(f(x))$  jest absolutnie zbieżny.*

*Dowód.* Dla ciągu  $c = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  zbadamy  $\sigma(c)$  w algebrze  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Funkcjonały multiplikatywne mają postać

$$\varphi_x(c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = f(x)$$

Zatem  $\sigma(c) = f([0, 2\pi)) = f(\mathbb{R})$ . Z założenia  $h \in H(c)$ , skąd wynika, że  $d := h(c) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . To oznacza, że  $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$  oraz  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n| < \infty$ .

Dalej

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} = \varphi_x(d) = \varphi_x(h(c)) = h(\varphi_x(c)) = h(f(x))$$

□

**Twierdzenie 3.15.** *Niech  $f(z)$  będzie funkcją holomorficzną w obszarze otwartym zawierającym  $\sigma(a)$ . Wtedy dla dowolnej funkcji całkowitej  $g(w)$  mamy*

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

*Dowód.* Niech  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ . Wtedy

$$g(f(a)) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f(a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (f^n)(a) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n f^n \right) (a) = (g \circ f)(a)$$

□

## 4 C\*-algebry

**Definicja 4.1.** Operację  $*$  :  $A \rightarrow A$  w algebrze Banacha nazywamy sprzężeniem jeśli

$$(a) \quad (a + b)^* = a^* + b^*$$

$$(b) \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$$

$$(c) \quad (ab)^* = b^* a^*$$

$$(d) \quad (a^*)^* = a$$

**Uwaga** Jeśli  $A$  ma jedność  $e$ , to  $e^* = e$  (zadanie).

**Definicja 4.2.** Algebrę Banacha nazywamy  $*$ -algebrą, jeśli  $\|a^*\| = \|a\|$ .

### Przykłady

(a)  $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ . Dla  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$  określamy  $a^*(n) = \overline{a(-n)}$ . Np.  $\delta_n^* = \delta_{-n}$ .

(b)  $A = C[0, 1]$  lub  $A = C(K)$ , gdzie  $K$  jest zwartą przestrzenią Hausdorffa. Wtedy  $f^*(t) = \overline{f(t)}$ .

(c)  $A = B(\mathcal{H})$  ze sprzężeniem operatorów.

**Definicja 4.3.** Algebrę Banacha z sprzężeniem nazywamy  $C^*$ -algebrą, jeśli  $\|a^*a\| = \|a\|^2$ .

**Uwaga** Z warunku wynika  $\|x^*\| = \|x\|$ . Rzeczywiście  $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \|x\|$ . Stąd  $\|x^*\| \geq \|x\|$ . Zatem  $\|x\| = \|x^{**}\| \geq \|x^*\|$ . **Przykłady** Algebra  $\ell^1(\mathbb{Z})$  nie jest  $C^*$ -algebrą (dlaczego?). Z kolei  $C(K)$  oraz  $B(\mathcal{H})$  są  $C^*$ -algebrami, bo  $\|\overline{f}f\|_\infty = \| |f|^2 \|_\infty = \|f\|_\infty^2$  oraz  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ . Druga równość wynika z

$$\|T^*T\| \geq \sup_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, x \rangle = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2$$

oraz  $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$ .

**Twierdzenie 4.4** (Gelfand-Naimark). Niech  $A$  będzie przemenną  $C^*$ -algebrą z jednością. Wtedy transformata Gelfanda jest izometrycznym  $*$ -izomorfizmem pomiędzy  $A$  oraz  $C(\text{Sp}(A))$  z normą  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Uwaga** Ogólnie homomorfizm  $h$  pomiędzy \*-algebrami nazywamy \*-homomorfizmem jeśli  $h(x^*) = h(x)^*$ . Izometria oznacza, że  $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|_A$ , a \*-izomorfizm, że  $\widehat{x^*} = \widehat{x}$ .

*Dowód.* Transformata Gelfanda jest liniowym homomorfizmem. Operacja  $*$  jest ciągła, bo  $\|x^*\| = \|x\|$ . Niech  $\varphi \in Sp(A)$  oraz  $a^* = a$ . Pokażemy, że  $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ . Dla  $t \in \mathbb{R}$  rozważmy elementy

$$u_t = \exp(ita) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ita)^n}{n!}$$

Wtedy  $u_t^* = \exp(-ita)$  oraz

$$u_t^* u_t = \exp(-ita) \exp(ita) = 1(a) = e$$

bo  $\exp(-itz) \exp(itz) = 1$ . Dalej

$$1 = \|e\| = \|u_t^* u_t\| = \|u_t\|^2$$

stąd  $\|u_t\| = 1$ . Dla  $\varphi \in Sp(A)$  otrzymujemy

$$1 \geq |\varphi(u_t)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\varphi(a))^n}{n!} \right| = |\exp(it\varphi(a))| = \exp(-t \operatorname{Ran} \varphi(a))$$

Ponieważ  $t$  jest dowolną liczbą rzeczywistą, to  $\operatorname{Ran} \varphi(a) = 0$ . To oznacza, że  $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ .

*Inny dowód* Niech  $\lambda = x + iy \in \sigma(a)$ . Zatem dla  $t \in \mathbb{R}$  mamy  $\lambda + it \in \sigma(a + ite)$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\lambda + it|^2 &\leq \|a + ite\|^2 = \|(a + ite)^*(a + ite)\| = \|(a - ite)(a + ite)\| \\ &= \|a^2 + t^2 e\| \leq \|a\|^2 + t^2 \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$|\lambda + it|^2 = |x + i(y + t)|^2 = x^2 + (y + t)^2 = x^2 + y^2 + 2yt + t^2$$

Zatem

$$x^2 + y^2 + 2yt \leq \|a\|^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

Z dowolności  $t$  otrzymujemy  $y = 0$ .

Dla  $a \in A$  niech  $a_1 = (a + a^*)/2$  oraz  $a_2 = (a - a^*)/(2i)$ . Wtedy  $a_1^* = a_1$ ,  $a_2^* = a_2$  oraz  $a = a_1 + ia_2$ . Zatem

$$\varphi(a^*) = \varphi(a_1 - ia_2) = \varphi(a_1) - i\varphi(a_2) = \overline{\varphi(a_1) + i\varphi(a_2)} = \overline{\varphi(a)}$$

Otrzymaliśmy  $\widehat{a^*} = \widetilde{a}$ , bo dla  $\varphi \in Sp(A)$  zachodzi

$$\widehat{a^*}(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \widetilde{a}(\varphi)$$

Czyli transformata Gelfanda jest \*-homomorfizmem.

Chcemy pokazać, że  $\|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$ . Mamy

$$\|\widehat{a}\|_\infty = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n}$$

Dla  $a^* = a$  otrzymujemy  $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$ . Ponieważ elementy  $a^k$  są samosprężone, to przez indukcję otrzymujemy  $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ , czyli  $r(a) = \|a\|$ . Zatem  $\|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$ . Rozważmy dowolny element  $a \in A$ . Wtedy

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\widetilde{a}\widehat{a}\|_\infty = \|\widehat{a}\|^2_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty^2$$

Pozostaje do pokazania, że  $\widehat{A} = C(Sp(A))$ . Skorzystamy z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa. Algebra  $\widehat{A}$  jest podalgebrą funkcji w  $C(Sp(A))$  zamkniętą na sprzężenie. Algebra  $\widehat{A}$  zawiera  $\widehat{e} = 1$  oraz rozdziela punkty, bo jeśli  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  dla  $\varphi_1, \varphi_2 \in Sp(A)$ , to  $\varphi_1(a) \neq \varphi_2(a)$  dla pewnego elementu  $a \in A$ . Tzn.  $\widehat{a}(\varphi_1) \neq \widehat{a}(\varphi_2)$ . Zatem  $\widehat{A}$  jest gęstą podalgebrą w  $C(Sp(A))$ . Z drugiej strony  $\widehat{A}$  jest domkniętą jako izometryczny obraz algebry Banacha  $A$ . Stąd  $\widehat{A} \cong C(Sp(A))$ .  $\square$

**Definicja 4.5.** Element  $a$  w  $C^*$ -algebrze  $B$  z jednością (niekoniecznie przemiennej) nazywamy normalnym jeśli  $a^*a = aa^*$ .

Niech  $A$  oznacza  $C^*$ -algebrę generowaną przez  $a$  oraz  $e$ . Tzn. rozważamy

$$A_0 = \{p(a, a^*) : p(x, y) \text{ wielomian dwu zmiennych o współczynnikach z } \mathbb{C}\}$$

Symbolem  $A$  oznaczmy domknięcie podalgebry  $A_0$  w  $C^*$ -algebrze  $B$ . Wtedy  $A$  jest przemianą  $C^*$ -algebrą z jednością.

**Wniosek 4.6.** Przy powyższych oznaczeniach otrzymujemy  $A \cong C(\sigma(a))$ , gdzie  $\sigma(a)$  oznacza spektrum elementu  $a$  w  $C^*$ -algebrze  $B$ .

*Dowód.* Z zadania 11 listy 5 wynika, że  $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$ . Rozważmy  $\hat{a} : Sp(A) \rightarrow \sigma(a)$ . Funkcja  $\hat{a}$  jest ciągła oraz  $\hat{a}(Sp(A)) = \sigma(a)$ . Ponadto funkcja  $\hat{a}$  jest różnowartościowa, bo jeśli  $\hat{a}(\varphi_1) = \hat{a}(\varphi_2)$ , to  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ . Zatem

$$\varphi_1(a^*) = \overline{\varphi_1(a)} = \overline{\varphi_2(a)} = \varphi_2(a^*)$$

Multiplikatywność pociąga  $\varphi_1 = \varphi_2$  na  $A_0$ . Z kolei z ciągłości charakterów  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  wynika  $\varphi_1 = \varphi_2$  na  $A$ . Reasumując odwzorowanie  $\hat{a}$  jest homeomorfizmem pomiędzy  $Sp(A)$  i  $\sigma(a)$ . Izomorfizm pomiędzy  $A$  oraz  $C(\sigma(a))$  zadany jest poprzez

$$A \xrightarrow{\hat{\cdot}} C(Sp(A)) \xrightarrow{h} C(\sigma(a))$$

Odwzorowanie  $h$  zadane jest wzorem

$$h(f)(\lambda) = f(\hat{a}^{-1}(\lambda)), \quad f \in C(Sp(A)), \quad \lambda \in \sigma(a)$$

**Przykład**  $A = \ell^\infty(\mathbb{N}) \cong C(Sp(A))$ . Mamy  $\mathbb{N} \subset Sp(A)$ , bo  $\varphi_n(a) = a_n$  jest charakterem. Zawieranie jest właściwe (dlaczego?). Można pokazać, że  $Sp(A) \cong C(K)$ , gdzie  $K$  jest uzwarceniem Čecha-Stone’a zbioru  $\mathbb{N}$ .  $\square$

Twierdzenie Gelfanda-Naimarka-Segal’a mówi, że  $C^*$ -algebra z jednością jest izometrycznie izomorficzna z domkniętą podalgebrą operatorów, zawierającą  $I$  w  $B(\mathcal{H})$ , dla pewnej przestrzeni, Hilberta. Np.  $C[0, 1]$  można utożsamić z algebrą operatorów  $M_f g = fg$  dla  $g \in L^2(0, 1)$ .

## 5 Operatory nieograniczone na przestrzeni Hilberta

Wiele operatorów określonych na podprzestrzeni przestrzeni Hilberta jest nieograniczonych. Podprzestrzeń, na której operator jest określony nazywamy jego dziedziną.

### Przykłady

- (a) Operator  $(Tf)(x) = xf(x)$  jest określony na  $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$ , czyli  $T : D(T) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ . Operator  $T$  jest nieograniczony, bo

$$\|T\mathbf{1}_{(n,n+1)}\|_2 = \|x\mathbf{1}_{(n,n+1)}\| \geq n\|\mathbf{1}_{(n,n+1)}\|_2$$

Przestrzeń  $D(T)$  jest gęsta w  $L^2(\mathbb{R})$ , bo zawiera wszystkie funkcje o ograniczonym nośniku.

- (b) Dla  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  określamy  $T : C^1[0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  wzorem  $Tf = f'$ .  $D(T)$  jest gęstą podprzestrzenią w  $\mathcal{H}$ . Dla  $f_n(x) = \sin(\pi nx)$  mamy  $(Tf_n)(x) = \pi n \cos(\pi nx)$ . Otrzymujemy  $\|Tf_n\|_2 = \pi n \|f_n\|_2$ .
- (c)  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $(Ta)_n = na_n$  oraz

$$D(T) = \left\{ a \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Podprzestrzeń  $D(T)$  jest gęsta, bo  $\delta_n \in D(T)$  dla wszystkich  $n$ . Ponadto  $\|T\delta_n\|_2 = n\|\delta_n\|_2$ .

Będziemy rozważać operatory  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  o gęstej dziedzinie.

**Definicja 5.1.** Operator  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  nazywamy symetrycznym jeśli

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad x, y \in D(A)$$

**Uwaga** Z tożsamości polaryzacyjnej wynika, że symetria jest równoważna warunkowi  $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$  dla wszystkich  $x \in D(A)$ , co z kolei jest równoważne  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ , dla  $x \in D(A)$ .

Operatory symetryczne o pełnej dziedzinie, tzn.  $D(A) = \mathcal{H}$ , są ograniczone z twierdzenia Hellingera-Toeplitza.

Dla dwu operatorów  $A$  i  $B$  zawieranie  $A \subseteq B$  oznacza, że  $D(A) \subseteq D(B)$  oraz  $Ax = Bx$  dla  $x \in D(A)$ . Mówimy wtedy, że  $B$  jest rozszerzeniem operatora  $A$ . Dla operatora  $A$  wykresem nazywamy podzbiór  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$\Gamma_A = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

Zauważmy, że  $A \subseteq B$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ .

**Definicja 5.2.** Dla operatora  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  operatorem sprzężonym  $A^*$  nazywamy operator o dziedzinie

$$D(A^*) = \{x \in \mathcal{H} : (\exists z \in \mathcal{H}) (\forall y \in D(A)) \langle Ay, x \rangle = \langle y, z \rangle\}$$

Dla  $x \in D(A^*)$  określamy  $A^*x = z$ .

**Uwaga** Element  $z$ , o ile istnieje, jest jedyny. Istotnie jeśli  $\langle y, z \rangle = \langle y, z' \rangle$  dla wszystkich  $y \in D(A)$ , to z gęstości dziedziny wynika  $z = z'$ .



**Uwaga** Może się zdarzyć, że  $D(A^*) = \{0\}$ . Naturalnym pytaniem jest kiedy  $D(A^*)$  jest gęstą podprzestrzenią w  $\mathcal{H}$ ? Dla operatora symetrycznego  $A$  mamy  $D(A) \subseteq D(A^*)$ . Rzeczywiście, dla  $x, y \in D(A)$  otrzymujemy

$$\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

zatem  $D(A) \subset D(A^*)$  oraz  $A^*x = Ax$ . Rolę elementu  $z$  pełni  $Ax$ . Ponadto warunek  $A \subseteq A^*$  jest równoważny symetrii operatora  $A$ .

**Uwaga** Z twierdzenia Riesz o postaci funkcjonałów ograniczonych na  $\mathcal{H}$  wynika, że warunek  $x \in D(A^*)$  jest równoważny temu, że funkcjonał liniowy

$$D(A) \ni y \mapsto \langle Ay, x \rangle \in \mathbb{C}$$

jest ograniczony, tzn.  $|\langle Ay, x \rangle| \leq c\|y\|$  dla pewnej stałej  $c \geq 0$  i wszystkich  $y \in D(A)$ .

W przestrzeni  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  określamy iloczyn skalarny wzorem

$$\langle (u, v), (u', v') \rangle = \langle u, u' \rangle + \langle v, v' \rangle$$

Niech  $J(u, v) = (v, -u)$ . Wtedy  $J$  jest izometrią na  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  oraz  $J^2 = -I$ .

**Lemat 5.3.** *Dla operatora  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  o gęstej dziedzinie mamy  $(x, z) \in \Gamma_{A^*}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(x, z) \perp J(\Gamma_A)$ . Tzn.  $\Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^\perp$ , w przestrzeni  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ . W szczególności wykres operatora  $A^*$  jest domknięty.*

*Dowód.* Teza wynika z określenia  $(x, z) \in \Gamma_{A^*}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle x, Ay \rangle - \langle z, y \rangle = 0, \quad y \in D(A)$$

tzn.

$$(x, z) \perp J(y, Ay), \quad y \in D(A)$$

□

**Definicja 5.4.** *Operator  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  nazywamy **domykalnym** jeśli  $\overline{\Gamma_A}$  jest wykresem operatora, oznaczanego symbolem  $\bar{A}$ . Operator  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  nazywamy **domkniętym**, jeśli wykres  $\Gamma_A$  jest domkniętą podprzestrzenią  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .*

**Uwaga** Każdy operator symetryczny jest domykalny, bo wykres  $A^*$  jest domknięty oraz  $A \subset A^*$ .

**Twierdzenie 5.5.** *Dziedzina operatora  $A^*$  jest gęsta wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest operatorem domykalnym.*

*Dowód.* Załóżmy, że  $v \perp D(A^*)$ . Równoważnie  $(v, 0) \perp \Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^\perp$ . Czyli

$$(v, 0) \in J(\Gamma_A)^{\perp\perp} = \overline{J(\Gamma_A)} = J(\overline{\Gamma_A})$$

To z kolei jest równoważne z warunkiem  $(0, v) \in \overline{\Gamma_A}$ , czyli  $v = 0$ .  $\square$

**Wniosek 5.6.** *Dla operatora domykalnego  $A$  zachodzi równość  $A^{**} = \overline{A}$ .*

*Dowód.* Mamy

$$\begin{aligned} \Gamma_{A^{**}} &= J(\Gamma_{A^*})^\perp = J(J(\Gamma_A)^\perp)^\perp = J(J(\Gamma_A)^{\perp\perp}) \\ &= J(\overline{J(\Gamma_A)}) = J^2(\overline{\Gamma(A)}) = -\overline{\Gamma_A} = \overline{\Gamma_A} = \Gamma_{\overline{A}} \end{aligned}$$

$\square$

### Przykłady

(a)  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$

$$Af = if' \quad D(A) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

Operator  $A$  jest symetryczny, bo dla  $f, g \in D(A)$

$$\langle Af, g \rangle = i \int_0^1 f' \overline{g} dx = if \overline{g} \Big|_0^1 - i \int_0^1 f \overline{g'} dx = \langle f, Ag \rangle$$

(b)  $(Af)(x) = xf(x)$ ,  $D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$

$$\langle Af, g \rangle = \langle xf, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \overline{g(x)} dx = \langle f, xg \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

**Definicja 5.7.** *Operator symetryczny  $A$  nazywamy **samosprężonym** jeśli  $A^* = A$ , tzn.  $D(A^*) = D(A)$ .*

### Przykłady

(a) Jak wyżej. Wtedy  $D(A) \subsetneq C^1[0, 1] \subseteq D(A^*)$ . Można pokazać, że

$$D(A^*) = \{f \in L^2(0, 1) : f \text{ absolutnie ciągła}, f' \in L^2(0, 1)\}$$

- (b) Jak wyżej. Pokażemy, że  $A^* = A$ . Wystarczy udowodnić, że  $D(A^*) \subseteq D(A)$ . Niech  $f \in D(A^*)$ . Mamy

$$D(A^*) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : |\langle Ag, f \rangle| \leq c\|g\|_2, \text{ dla pewnej stałej } c \text{ i } g \in D(A)\}$$

Niech  $g_n(x) = xf(x)\mathbb{1}_{(-n,n)}(x)$ . Wtedy  $g_n \in D(A)$ , bo  $xg_n(x)$  jest ograniczona. Załóżmy, że  $f \in D(A^*)$ . Wtedy

$$|\langle xg_n, f \rangle| = |\langle Ag_n, f \rangle| \leq c\|g_n\|_2$$

Zatem

$$\int_{-n}^n x^2 |f(x)|^2 dx \leq c \left( \int_{-n}^n x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

czyli

$$\int_{-n}^n x^2 |f(x)|^2 dx \leq c^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ponieważ  $n$  jest dowolne, to  $xf \in L^2(\mathbb{R})$ .

**Lemat 5.8.** *Jeśli  $A \subseteq B$ , to  $B^* \subseteq A^*$ .*

*Dowód.* Mamy

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{x \in \mathcal{H} : (\exists z \in \mathcal{H}) (\forall y \in D(A)) \langle Ay, x \rangle = \langle y, z \rangle\} \\ D(B^*) &= \{x \in \mathcal{H} : (\exists z \in \mathcal{H}) (\forall y \in D(B)) \langle By, x \rangle = \langle y, z \rangle\} \end{aligned}$$

Dla  $y \in D(A)$  mamy  $Ay = By$ . Zatem  $D(B^*) \subseteq D(A^*)$ . Ponadto dla  $x \in D(B^*)$  odpowiadający element  $z = B^*x$  jest równy  $A^*x$ .

Inne wyjaśnienie:

$$\Gamma_{B^*} = J(\Gamma_B)^\perp \supset J(\Gamma_A)^\perp = \Gamma_{A^*}$$

□

**Uwaga** Załóżmy, że  $A \subseteq B$  oraz  $A$  i  $B$  są symetryczne. Wtedy

$$A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^*$$

Zatem jeśli  $A$  jest samosprężony, to  $A = B = B^* = A^*$ . Tzn. operator samosprężony nie posiada nietrywialnych symetrycznych rozszerzeń.

**Lemat 5.9.** *Dla operatora symetrycznego  $A$  operator  $\bar{A}$  jest również symetryczny.*

*Dowód.* Jeśli  $x \in D(\bar{A})$ , to istnieje ciąg  $x_n \in D(A)$  taki, że  $x_n \rightarrow x$  oraz  $Ax_n \rightarrow \bar{A}x$ . Wtedy

$$\langle \bar{A}x, x \rangle = \lim_n \langle Ax_n, x_n \rangle \in \mathbb{R}$$

□

**Lemat 5.10.** *Jeśli  $A$  jest domykalny, to  $(\bar{A})^* = A^*$ .*

*Dowód.* Wiemy, że podprzestrzeń  $D(A^*)$  jest gęsta. Dalej

$$\Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^\perp = \overline{J(\Gamma_A)}^\perp = J(\overline{\Gamma_A})^\perp = J(\Gamma_{\bar{A}})^\perp = \Gamma_{(\bar{A})^*}$$

□

**Lemat 5.11.** *Wartości własne operatora symetrycznego są liczbami rzeczywistymi.*

*Dowód.* Niech  $A \subseteq A^*$  oraz  $Av = \lambda v$ ,  $v \neq 0$ . Wtedy  $\mathbb{R} \ni \langle Av, v \rangle = \lambda \|v\|^2$ , czyli  $\lambda \in \mathbb{R}$ . □

**Definicja 5.12.** *Operator symetryczny nazywamy **istotnie samosprężonym** jeśli jego domknięcie jest operatorem samosprężonym.*

**Uwaga** Dla operatora symetrycznego, jeśli  $A^*$  jest symetryczny, to  $A$  jest istotnie samosprężony. Rzeczywiście

$$A \subset A^* \subset A^{**} = \bar{A}$$

Stąd  $\bar{A} = A^* = \bar{A}^*$ .

**Twierdzenie 5.13.** *Operator symetryczny  $A$  jest istotnie samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej (równoważnie pewnej) liczby  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  przestrzenie  $\text{Ran}(A - zI)$  oraz  $\text{Ran}(A - \bar{z}I)$  są gęste w  $\mathcal{H}$ .*

**Uwaga** Gdy  $A$  jest ograniczony (niekoniecznie symetryczny), to  $D(\bar{A}) = \mathcal{H}$  (zadanie). Wtedy  $\bar{A}$  jest operatorem ograniczonym określonym na  $\mathcal{H}$ . Jeśli  $A$  jest symetryczny, to  $\bar{A}$  jest samosprężony. Zatem  $\bar{A} - zI$  jest odwracalny. Stąd  $\text{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$ . To oznacza, że  $\text{Ran}(A - zI)$  jest gęstą podprzestrzenią w  $\mathcal{H}$ .

**Lemat 5.14.** *Dla operatora symetrycznego przestrzeń  $\text{Ran}(A - zI)$  jest gęsta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $\bar{z}$  nie jest wartością własną operatora  $A^*$ .*

*Dowód.* Warunek  $\text{Ran}(A - zI)$  nie jest gęsta jest równoważny istnieniu  $0 \neq v \perp \text{Ran}(A - zI)$ , tzn.  $\langle Aw - zw, v \rangle = 0$  dla  $w \in D(A)$ . Równoważnie

$$\langle Aw, v \rangle = z\langle w, v \rangle = \langle w, \bar{z}v \rangle, \quad w \in D(A)$$

Ostatnia równość oznacza, że  $v \in D(A^*)$  oraz  $A^*v = \bar{z}v$ . □

Przechodzimy do dowodu twierdzenia.

*Dowód.* ( $\implies$ ) Niech  $A$  będzie istotnie samosprężony. Załóżmy, że  $v \perp \text{Ran}(A - zI)$ . Z dowodu lematu otrzymujemy  $A^*v = \bar{z}v$ . Z założenia operator  $A^*$  jest symetryczny, bo  $A^* = (\bar{A})^* = \bar{A}$ . Zatem  $v = 0$ .

( $\impliedby$ ) Załóżmy, że przestrzenie  $\text{Ran}(A - zI)$  oraz  $\text{Ran}(A - \bar{z}I)$  są gęste w  $\mathcal{H}$  dla pewnej liczby  $z \notin \mathbb{R}$ . Pokażemy, że  $\text{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$ . Mamy

$$\text{Ran}(A - zI) \subseteq \text{Ran}(\bar{A} - zI) \subseteq \mathcal{H}$$

Wystarczy udowodnić, że przestrzeń  $\text{Ran}(\bar{A} - zI)$  jest domknięta. Dla  $v \in D(\bar{A})$  mamy

$$\langle (\bar{A} - zI)v, v \rangle = \langle \bar{A}v, v \rangle - z\langle v, v \rangle$$

Zatem

$$|\text{Im} \langle (\bar{A} - zI)v, v \rangle| = |\text{Im} z| \|v\|^2 \quad (*)$$

Założmy, że ciąg  $w_n = (\bar{A} - zI)v_n$ ,  $v_n \in D(\bar{A})$  jest zbieżny. Oznaczmy  $w = \lim_n w_n$ . Pokażemy, że  $w \in \text{Ran}(\bar{A} - zI)$ . Ciąg  $v_n$  spełnia warunek Cauchy'ego na podstawie równości (\*) zastosowanej do  $v := v_n - v_m$ . Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\text{Im} z| \|v_n - v_m\|^2 &= |\text{Im} \langle (\bar{A} - zI)(v_n - v_m), v_n - v_m \rangle| \\ &= |\text{Im} \langle w_n - w_m, v_n - v_m \rangle| \leq \|w_n - w_m\| \|v_n - v_m\| \end{aligned}$$

Otrzymujemy  $\|v_n - v_m\| \leq |\text{Im} z|^{-1} \|w_n - w_m\|$ . Oznaczmy  $v = \lim_n v_n$ . Ze zbieżności  $w_n$  wynika zbieżność  $\bar{A}v_n = w_n + zv_n \rightarrow w + zv$ . Z domkniętości wykresu dostajemy  $v \in D(\bar{A})$  oraz  $\bar{A}v = w + zv$ , czyli  $(\bar{A} - zI)v = w$ . To kończy dowód równości  $\text{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$ .

Pokażemy, że  $A^* = \bar{A}$ . Wystarczy udowodnić, że  $A^* \subset \bar{A}$ . Niech  $v \in D(A^*)$ . Z własności  $\text{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$  istnieje wektor  $w \in D(\bar{A}) \subset D(A^*)$  taki, że

$$(A^* - zI)v = (\bar{A} - zI)w = (A^* - zI)w$$

Zatem  $(A^* - zI)(v - w) = 0$ . Tzn.  $v - w$  jest wektorem własnym operatora  $A^*$  z wartością własną  $z$ . Jeśli  $v \neq w$  to z lematu podprzestrzeń  $\text{Ran}(A - \bar{z}I)$  nie jest gęsta. Zatem  $v = w$ , czyli  $v \in D(\bar{A})$ .  $\square$

### Przykłady

(a)  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ .

$$Af = if', \quad D(A) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

Zauważmy, że  $C^1[0, 1] \subset D(A^*)$  oraz  $A^*g = ig'$  dla  $g \in C^1[0, 1]$ . Chcemy sprawdzić, czy  $A$  jest istotnie samosprężony. W tym celu rozwiązujemy równanie  $(A^* - zI)g = 0$  dla  $g \in D(A^*)$ . Załóżmy, że  $g \in C^1[0, 1]$ . Otrzymujemy równanie  $ig' = zg$ , którego rozwiązaniem jest  $g(x) = e^{-izx} \in C^1$ . Stąd  $A$  nie jest istotnie samosprężony.

(b)  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ .

$$Af = if', \quad D(A) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1)\}$$

Pokażemy, że  $A$  jest istotnie samosprężony. Wystarczy udowodnić, że podprzestrzenie  $\text{Ran}(A \pm iI)$  są gęste. Sprawdźmy gęstość  $\text{Ran}(A - iI)$ . Załóżmy, że  $f \perp \text{Ran}(A - iI)$ . Tzn.

$$\langle (A - iI)g, f \rangle = 0, \quad g \in D(A)$$

Otrzymujemy warunek

$$\langle g, f \rangle = \langle g', f \rangle, \quad g \in D(A) \quad (**)$$

Funkcja  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  jest ciągła. Zatem

$$\langle g, f \rangle = \int_0^1 g(x) \overline{f(x)} dx = g(x) \overline{F(x)} \Big|_0^1 - \int_0^1 g'(x) \overline{F(x)} dx = g(1) \overline{F(1)} - \langle g', F \rangle$$

Podstawiając  $g \equiv 1$  do  $(**)$  dostajemy  $F(1) = 0$ . Czyli

$$\langle g', f \rangle = \langle g, f \rangle = -\langle g', F \rangle$$

Zbiór  $\{g' : g \in D(A)\}$  składa się ze wszystkich funkcji ciągłych o całce 0. Ten zbiór jest gęsty (zadanie) w

$$L_0^2(0, 1) := \left\{ h \in L^2(0, 1) : \int_0^1 h(x) dx = 0 \right\} = 1^\perp$$

Zatem  $f + F \perp L_0^2(0, 1)$ . Czyli  $f(x) + F(x) = C$  prawie wszędzie, dla pewnej stałej  $C$ . Uzyskujemy  $f(x) = -F(x) + C$  prawie wszędzie. Funkcja  $F(x)$  jest ciągła. Możemy przyjąć, że  $f(x) = -F(x) + C$  dla  $0 \leq x \leq 1$ . Stąd  $f$  jest ciągła, czyli  $F$  jest klasy  $C^1$ . Zatem  $f$  jest również klasy  $C^1$ . Różniczkując otrzymujemy  $f' = -f$ . Zatem  $f(x) = de^{-x}$ . Z warunku  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  uzyskujemy  $d = 0$ , czyli  $f = 0$ .

Dla operatora symetrycznego  $A$  oraz  $z \notin \mathbb{R}$  operator  $A - zI$  jest różnowartościowy ze wzoru (\*). Jeśli  $A$  jest samosprężony, to podprzestrzeń  $\text{Ran}(A - zI)$  jest gęsta oraz domknięta, co wynika z dowodu Twierdzenia 5.13. Zatem  $\text{Ran}(A - zI) = \mathcal{H}$ . Reasumując

$$A - zI, A - \bar{z}I : D(A) \xrightarrow[1-1]{na} \mathcal{H}$$

**Definicja 5.15.** Dla  $z \notin \mathbb{R}$  i operatora samosprężonego  $A$  określamy transformatę Cayleya wzorem

$$U_z = -(A - zI)(A - \bar{z}I)^{-1} : \mathcal{H} \xrightarrow[1-1]{na} \mathcal{H}$$

**Twierdzenie 5.16.** Dla operatora samosprężonego  $A$  transformata Cayleya jest operatorem unitarnym.

*Dowód.* Dla  $v \in D(A)$  mamy

$$\begin{aligned} \|(A - zI)v\|^2 &= \|Av\|^2 + |z|^2\|v\|^2 - \bar{z}\langle Av, v \rangle - z\langle v, Av \rangle \\ &= \|Av\|^2 + |z|^2\|v\|^2 - 2\text{Re}(z)\langle Av, v \rangle \end{aligned}$$

Ponieważ wynik nie zależy od  $\text{Im } z$ , to  $\|(A - zI)v\| = \|(A - \bar{z}I)v\|$ . Mamy  $U_z : (A - \bar{z}I)v \mapsto -(A - zI)v$ . Ponieważ każdy wektor  $w \in \mathcal{H}$  ma postać  $w = (A - \bar{z}I)v$  dla pewnego  $v \in \mathcal{H}$ , to  $U_z$  jest izometrią z  $\mathcal{H}$  na siebie.  $\square$

Naszym celem jest wyrażenie operatora  $A$  za pomocą  $U_i$ .

**Twierdzenie 5.17.** Dla  $z \notin \mathbb{R}$  operator  $I + U_z$  jest różnowartościowy oraz  $\text{Ran}(I + U_z) = D(A)$ .

*Dowód.* Dla  $v \in D(A)$  mamy  $U_z(A - \bar{z}I)v = -(A - zI)v$ . Oznaczmy  $w = (A - \bar{z}I)v$ . Wtedy

$$(I + U_z)w = (A - \bar{z}I)v - (A - zI)v = (z - \bar{z})v \neq 0, \quad v \neq 0$$

Zatem  $\text{Ran}(I + U_z) \supseteq D(A)$ . Z drugiej strony każdy wektor  $w \in \mathcal{H}$  ma postać  $(A - \bar{z}I)v$  dla pewnego  $v \in D(A)$ . Czyli  $\text{Ran}(I + U_z) \subseteq D(A)$ . Ze wzoru wynika różnowartościowość.  $\square$

Określmy  $U := U_i = -(A - iI)(A + iI)^{-1}$ .

**Twierdzenie 5.18.**

$$A = i(I - U)(I + U)^{-1}$$

*Dowód.* Obie strony są określone na  $D(A)$ , z poprzedniego twierdzenia. Mamy

$$I + U = (A + iI)(A + iI)^{-1} - (A - iI)(A + iI)^{-1} = 2i(A + iI)^{-1} \quad (*)$$

Dowód jest łatwy, gdy  $A$  jest ograniczonym operatorem samosprzężonym, bo nie musimy dbać o dziedziny. Wtedy  $I + U$  jest odwracalny<sup>a</sup>. Otrzymujemy

$$A = 2i(I + U)^{-1} - iI = 2i(I + U)^{-1} - i(I + U)(I + U)^{-1} = i(I - U)(I + U)^{-1}$$

W przypadku ogólnym mamy

$$A + iI : D(A) \xrightarrow[1-1]{na} \mathcal{H}, \quad I + U : \mathcal{H} \xrightarrow[1-1]{na} D(A)$$

Dalej

$$I - U = (A + iI)(A + iI)^{-1} + (A - iI)(A + iI)^{-1} = 2A(A + iI)^{-1}$$

Ponadto z (\*) na przestrzeni  $D(A)$  zachodzi wzór  $(I + U)^{-1} = -\frac{i}{2}(A + iI)$ . Otrzymujemy

$$i(I - U)(I + U)^{-1} = 2iA(A + iI)^{-1} \left(-\frac{i}{2}\right)(A + iI) = A$$

$\square$

---

<sup>a</sup>Gdy  $I + U$  jest odwracalny, to  $-1 \notin \sigma(U)$ . Zatem  $\sigma(U) \subset \{e^{it} : -\pi + \delta \leq t \leq \pi - \delta\}$  dla pewnej liczby  $0 < \delta < \pi$ .



## 6 Rozkład spektralny operatora unitarnego

Dla operatora unitarnego  $U$  niech  $D$  oznacza rodzinę nieujemnych funkcji ciągłych będących granicami funkcji ciągłych i nieujemnych na  $\sigma(U)$ .

Dla liczb rzeczywistych  $0 < \lambda - \mu < 2\pi$  niech

$$\mathbb{1}_{(\mu, \lambda)}(e^{it}) = \begin{cases} 1 & \mu < t < \lambda \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wtedy  $\mathbb{1}_{(\mu, \lambda)} \in D$ . Dla liczby  $-\pi < \lambda \leq \pi$  określamy funkcje

$$f_\pi \equiv 1, \quad f_\lambda = \mathbb{1}_{(-\pi, \lambda)}, \quad -\pi < \lambda < \pi$$

Dla ustalonego operatora unitarnego niech  $E(\lambda) = f_\lambda(U)$ . Operatory  $E(\lambda)$  są nieujemne. Ponadto dla  $\mu \leq \lambda$  mamy

$$E(\mu)E(\lambda) = f_\mu(U)f_\lambda(U) = (f_\mu f_\lambda)(U) = f_\mu(U) = E(\mu)$$

W szczególności  $E(\lambda)^2 = E(\lambda)$ , czyli  $E(\lambda)$  jest rzutem ortogonalnym. Ponadto

$$E(\lambda) - E(\mu) = E(\lambda)[I - E(\mu)] \geq 0$$

Nierówność wynika również z faktu, że  $0 \leq f_\mu(e^{it}) \leq f_\lambda(e^{it})$ , czyli

$$E(\lambda) - E(\mu) = (f_\lambda - f_\mu)(U) \geq 0$$

**Lemat 6.1.** Dla  $-\pi < \mu < \lambda \leq \pi$  mamy

$$E(\lambda) - E(\mu) \geq \mathbb{1}_{(\mu, \lambda)}(U)$$

$$E(\lambda) - E(\mu) \leq \mathbb{1}_{(\mu - \delta, \lambda)}(U), \quad \mu - \delta > -\pi, \quad \lambda < \pi$$

$$E(\pi) - E(\mu) \leq \mathbb{1}_{(\mu - \delta, \pi + \delta)}(U), \quad \mu - \delta > -\pi, \quad \pi + \delta, \quad (\pi + \delta) - (\mu - \delta) < 2\pi$$

*Dowód.* Pierwsza nierówność wynika z  $f_\mu + \mathbb{1}_{(\mu, \lambda)} \leq f_\lambda$ . Z kolei dla  $\lambda < \pi$  mamy  $f_\mu + \mathbb{1}_{(\mu - \delta, \lambda)} \geq f_\lambda$ . Ostatnia nierówność wynika z  $1 \leq f_\mu + \mathbb{1}_{(\mu - \delta, \pi + \delta)}$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.2.** Dla  $-\pi < \lambda < \pi$  zachodzi  $\lim_{\mu \rightarrow \lambda^-} E(\mu)v = E(\lambda)v$  dla wszystkich  $v \in \mathcal{H}$ . Równoważnie rodzina  $E(\lambda)$  jest mocno lewostronnie ciągła dla  $-\pi < \lambda < \pi$ .

*Dowód.* Niech  $\mu_n \nearrow \lambda$ . Istnieje rosnący ciąg  $g_n$  funkcji ciągłych na  $\mathbb{T}$ , zbieżny punktowo do  $f_\lambda$  spełniający  $0 \leq g_n \leq f_{\mu_n}$ . Wtedy

$$0 \leq g_n(U) \leq f_{\mu_n}(U) \leq f_\lambda(U)$$

Ponieważ  $f_\lambda(U)$  jest mocną granicą operatorów  $g_n(U)$ , to  $f_{\mu_n}(U) \rightarrow f_\lambda(U)$  mocno, czyli  $E(\mu_n) \rightarrow E(\lambda)$  mocno. W tym miejscu korzystamy z

**Lemat 6.3.** *Niech  $0 \leq A_n \leq B_n$  oraz  $B_n \rightarrow 0$  mocno. Wtedy  $B_n \rightarrow 0$  mocno.*

*Dowód.* Mamy

$$0 \leq \langle A_n v, v \rangle \leq \langle B_n v, v \rangle$$

Zatem  $\langle A_n v, v \rangle \rightarrow 0$ . Ciąg norm  $\|A_n\|$  jest ograniczony. Z nierówności

$$\|A_n v\|^2 \leq \|A_n\| \langle A_n v, v \rangle$$

otrzymujemy tezę. □

Lemat stosujemy do  $B_n = f_\lambda(U) - g_n(U)$  oraz  $A_n = f_\lambda(U) - f_{\mu_n}(U)$ . □

**Twierdzenie 6.4.**  $\lim_{\lambda \rightarrow -\pi^+} E(\lambda)v = 0$  dla  $v \in \mathcal{H}$ .

*Dowód.* Niech  $\lambda_n \searrow -\pi$ . Wtedy ciąg  $E(\lambda_n)$  jest malejącym ciągiem operatorów nieujemnych, więc jest mocno zbieżny do pewnego rzutu  $E$ . Dla ustalonej liczby  $-\pi < \lambda < \pi$  istnieje niemalejący ciąg funkcji ciągłych  $g_n$  zbieżny punktowo do  $f_\lambda$  taki, że  $g(e^{it}) = 0$  dla  $-\pi < t < \lambda_n$ . Wtedy

$$g_n(U)E(\lambda_n) = g_n(U)f_{\lambda_n}(U) = (g_n f_{\lambda_n})(U) = 0$$

Z drugiej strony

$$0 = g_n(U)E(\lambda_n) \rightarrow E(\lambda)E \geq E \geq 0$$

Czyli  $E = 0$ . □

Określmy  $E(-\pi) = 0$ .

**Lemat 6.5.** *Operatory  $B, C \in B(\mathcal{H})$  są przemienne oraz  $C \geq B \geq 0$ . Wtedy  $\|BA\| \leq \|CA\|$  dla dowolnego operatora  $A \in B(\mathcal{H})$ .*

*Dowód.* Mamy

$$0 \leq (BA)^*(BA) = A^*B^2A \leq A^*C^2A = (CA)^*(CA)$$

Zatem

$$\|BA\|^2 = \|(BA)^*(BA)\| \leq \|(CA)^*(CA)\| = \|CA\|^2$$

□

**Twierdzenie 6.6.** *Niech  $f \in C(\mathbb{T})$  oraz  $\varepsilon > 0$ . Istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że dla każdego podziału  $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  przedziału  $[-\pi, \pi]$  o średnicy mniejszej niż  $\delta$  i dowolnego wyboru punktów pośrednich  $t_{j-1} \leq s_j \leq t_j$  mamy*

$$\left\| \sum_{j=1}^n f(e^{is_j}) \Delta E(t_j) - f(U) \right\| < \varepsilon, \quad \Delta E(t_j) = E(t_j) - E(t_{j-1})$$

*Stosujemy wtedy zapis*

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dE(t)$$

*W szczególności*

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dE(t)$$

*Dowód.* Wystarczy rozważać funkcje o wartościach rzeczywistych. Rozważmy podział  $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  o średnicy mniejszej niż  $\delta$ . Ponieważ  $\sum_{j=1}^n \Delta E(t_j) = I$ , to

$$\sum_{j=1}^n f(e^{is_j}) \Delta E(t_j) - f(U) = \sum_{j=1}^n [f(e^{is_j})I - f(U)] \Delta E(t_j)$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \| [f(e^{is_j})I - f(U)] \Delta E(t_j) \| &= \| |f(e^{is_j})I - f(U)| \Delta E(t_j) \| \\ &\leq \| |f(e^{is_j})I - f(U)| \mathbf{1}_{(t_{j-1}-\delta, t_j+\delta)}(U) \| \leq \max_{|t-s| \leq 2\delta} |f(e^{it}) - f(e^{is})| =: M_\delta \end{aligned}$$

Z lematu każdy składnik jest operatorem samosprzężonym i ma normę nie większą niż  $M_\delta$ , zatem mieści się pomiędzy  $-M_\delta I$  i  $M_\delta I$ . Stąd po pomnożeniu przez  $\Delta E(t_j)$  mieści się pomiędzy  $-M_\delta \Delta E(t_j)$  a  $M_\delta \Delta E(t_j)$ . Po zsumowaniu otrzymujemy

$$-M_\delta I = M_\delta \sum_{j=1}^n \Delta E(t_j) \leq \sum_{k=1}^n f(s_j) \Delta E(t_j) - f(U) \leq M_\delta \sum_{j=1}^n \Delta E(t_j) \leq M_\delta I$$

Stąd

$$\left\| \sum_{j=1}^n f(e^{is_j}) \Delta E(t_j) - f(U) \right\| \leq M_\delta$$

□

**Uwaga** Spektrum operatora  $\sum_{j=1}^n f(e^{is_j}) \Delta E(t_j)$  jest skończone i składa się z wartości własnych  $\{f(e^{is_j})\}_{j=1}^n$ , dla których  $\Delta E(t_j) \neq 0$ . Ponadto

$$\left\| \sum_{j=1}^n f(e^{is_j}) \Delta E(t_j) \right\| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |f(e^{is_j})|$$

**Twierdzenie 6.7.**

- (a) Dla  $-\pi < \mu < \pi$  jeśli  $E(\mu - \delta) = E(\mu + \delta)$ , dla pewnej liczby  $0 < \delta < \min\{\mu, \pi - \mu\}$ , to  $e^{i\mu} \notin \sigma(U)$ . Jeśli  $E(-\pi + \delta) = 0$  oraz  $E(\pi - \delta) = I$  dla pewnej liczby  $0 < \delta < \pi/2$ , to  $-1 \notin \sigma(U)$
- (b) Dla  $-\pi < \mu < \pi$ , jeśli  $e^{i\mu} \notin \sigma(U)$ , to  $E(\mu - \delta) = E(\mu + \delta)$  dla pewnej liczby  $0 < \delta < \min\{\mu, \pi - \mu\}$ . Jeśli  $-1 \notin \sigma(U)$ , to  $E(-\pi + \delta) = 0$  oraz  $E(\pi - \delta) = I$  dla pewnej liczby  $0 < \delta < \pi/2$ .

*Dowód.* (a) Załóżmy, że  $-\pi < \mu < \pi$ . Rozważmy podział  $\mathcal{P}$  zawierający  $\mu - \delta$  oraz  $\mu + \delta$ . Wtedy spektrum każdej sumy częściowej dla  $U$ , czyli  $f(z) = z$ , nie zawiera liczb  $e^{it}$  dla  $\mu - \delta < t < \mu + \delta$ . Zatem odległość liczby  $e^{i\mu}$  od spektrum sumy częściowej jest większe niż  $\varepsilon$  dla pewnej liczby dodatniej  $\varepsilon$ . To samo dotyczy granicy, gdy średnica  $\mathcal{P}$  dąży do zera, czyli operatora  $U$ . W szczególności  $e^{i\mu} \notin \sigma(U)$ . Podobnie jeśli  $E(\pi - \delta) = I$  i  $E(-\pi + \delta) = 0$ , to  $-1 \notin \sigma(U)$ . W tym wypadku rozważamy podział zawierający liczby  $-\pi + \delta$  i  $\pi - \delta$ .

(b) Załóżmy, że  $e^{i\mu} \notin \sigma(U)$  dla  $-\pi < \mu < \pi$ . Rozważmy podział zawierający  $\mu = t_{j_0}$  taki, że  $s_{j_0} = s_{j_0+1} = \mu$ . Wtedy spektrum

$$\sum_{j=1}^n e^{is_j} \Delta E(t_j)$$

zawiera  $e^{i\mu}$ , jeśli  $\Delta E(t_{j_0}) \neq 0$  lub  $\Delta E(t_{j_0+1}) \neq 0$ . Ponieważ sumy częściowe są zbieżne do  $U$ , to istnieje podział  $\mathcal{P}$ , którego spektrum nie zawiera  $e^{i\mu}$ . Zatem  $\Delta E(t_{j_0}) = 0$  oraz  $\Delta E(t_{j_0+1}) = 0$ . Podobnie jeśli  $-1 \notin \sigma(U)$ , to wybieramy

$s_1 = -\pi$  oraz  $s_n = \pi$ . Podobne rozumowanie daje, że dla pewnego podziału  $\Delta E(t_1) = 0$  oraz  $\Delta E(t_n) = 0$ .

□

Dla  $-\pi < \lambda < \pi$  określamy

$$P_\lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [E(\lambda + \delta) - E(\lambda)], \quad P_\pi = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [I - E(\pi - \delta)]$$

Wtedy  $P_\lambda$  są rzutami jako mocne granice przemiennej rzutów.

**Twierdzenie 6.8.** *Operator  $P_\lambda$  jest rzutem na podprzestrzeń wektorów własnych operatora  $U$  odpowiadających wartości własnej  $e^{i\lambda}$ .*

*Dowód.* Będziemy korzystać z

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dE(t)$$

Rozważmy  $-\pi < \lambda < \pi$ . Niech  $P_\lambda v = v$ , dla  $v \neq 0$ . Ponieważ

$$P_\lambda \leq E(\lambda + \delta) - E(\lambda) \leq E(\lambda + \delta), \quad \delta > 0$$

to  $E(\lambda + \delta)v = v$  i  $E(\lambda)v = 0$ . Stąd wynika, że funkcja  $t \mapsto E(t)v$  jest stała na przedziałach  $(-\pi, \lambda]$  i  $(\lambda, \pi]$ . Rozważmy podział  $\mathcal{P}$ , typu lewy koniec, zawierający  $-\pi < \lambda = t_{j_0} < \pi$ . Z wcześniejszej uwagi przyrosty  $\Delta E(t_j)v$  są zerowe dla  $j \leq j_0$  oraz dla  $j \geq j_0 + 2$ . Zatem

$$\sum_{j=1}^n e^{it_{j-1}} \Delta E(t_j)v = e^{it_{j_0}} \Delta E(t_{j_0+1})v = e^{i\lambda} [E(t_{j_0+1})v - E(\lambda)v] = e^{i\lambda}v$$

Ponieważ sumy dążą do  $U$ , to  $Uv = e^{i\lambda}v$ .

Jeśli  $P_\pi v = v$ , to  $E(\lambda)v = 0$  dla  $-\pi < \lambda < \pi$ . Rozważmy podział typu prawy koniec. Wtedy  $\Delta E(t_j)v = 0$  dla  $j < n$ .

$$\sum_{j=1}^n e^{it_j} \Delta E(t_j)v = e^{it_n} \Delta E(t_n)v = -\Delta E(t_n)v = -[I - E(t_{n-1})]v$$

Po przejściu do granicy uzyskujemy  $Uv = -v$ .

Założmy, że  $Uv = e^{i\lambda}v$  dla  $-\pi < \lambda < \pi$ . Wtedy dla  $w = E(\mu)v$  mamy

$$Uw = UE(\mu)v = E(\mu)Uv = e^{i\lambda}E(\mu)v = e^{i\lambda}w$$

Założmy, że  $-\pi < \mu < \lambda$ . Mamy  $\Delta E(t_j) E(\mu) = 0$  dla  $t_{j-1} \geq \mu$ , zatem

$$\left[ \sum_{j=1}^n e^{it_{j-1}} \Delta E(t_j) \right] E(\mu) = \sum_{j, t_{j-1} < \mu}^n e^{it_{j-1}} \Delta E(t_j)$$

Zatem odległość liczby  $e^{i\lambda}$  od spektrum każdej sumy jest większa niż pewna liczba  $0 < \varepsilon < 1$ . To samo dotyczy granicy  $UE(\mu)$ . Zatem  $E(\mu)v = w = 0$  dla  $\mu < \lambda$ . Ze względu na lewostronną mocną ciągłość otrzymujemy  $E(\lambda)v = 0$ . Podobnie dla  $\mu > \lambda$  mamy  $U[I - E(\mu)]v = e^{i\lambda}[I - E(\mu)]v$ . Odległość liczby  $e^{i\lambda}$  od spektrum każdej sumy

$$\left[ \sum_{j=1}^n e^{it_j} \Delta E(t_j) \right] [I - E(\mu)] = \sum_{j, t_{j-1} \geq \mu}^n e^{it_j} \Delta E(t_j)$$

jest większa niż pewna liczba  $0 < \varepsilon < 1$ . To samo dotyczy granicy  $U[I - E(\mu)]$ . Zatem  $[I - E(\mu)]v = 0$ , czyli  $E(\mu)v = v$  dla  $\mu > \lambda$ . Stąd  $[E(\lambda + \delta) - E(\lambda)]v = v$ , czyli  $P_\lambda v = v$ . Podobne rozumowanie daje, że jeśli  $Uv = e^{i\pi}v = -v$ , to  $E(\mu)v = 0$  dla  $\mu < \pi$ . Zatem  $[I - E(\lambda)]v = v$ , czyli  $P_\pi v = v$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.9.** Dla  $-\pi < \lambda < \pi$  oraz funkcji ciągłej  $h$  na  $\mathbb{T}$  mamy

$$\langle h(U)E(\lambda)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\lambda} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle$$

*Dowód.* Niech  $g_n(e^{it})$  będzie rosnącym ciągiem funkcji nieujemnych zbieżnym punktowo do  $f_\lambda(e^{it})$ , zatem  $g_n(U) \rightarrow E(\lambda)$  mocno. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle h(U)E(\lambda)v, v \rangle &= \lim_n \langle h(U)g_n(U)v, v \rangle = \lim_n \langle (hg_n)(U)v, v \rangle \\ &= \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it})g_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &= \lim_n \int_{-\pi}^{\lambda} h(e^{it})g_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\lambda} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \end{aligned}$$

Pierwsz równość wynika z faktu, że  $g_n(e^{it}) = 0$  dla  $t \geq \lambda$ . Dla dowodu przejścia granicznego możemy przyjąć, że dla ustalonej liczby  $0 < \delta < \frac{1}{2}(\pi - \lambda)$

mamy  $g_n(e^{it}) = 1$  dla  $-\pi + \delta < t < \lambda - \delta$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) g_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle &= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} h(e^{it}) g_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &\quad + \int_{-\pi+\delta}^{\lambda-\delta} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle + \int_{\lambda-\delta}^{\lambda} h(e^{it}) g_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \end{aligned}$$

Skrajne całki można oszacować przez

$$\|h\|_{\infty} \langle E(-\pi + \delta)v, v \rangle, \quad \|h\|_{\infty} [\langle E(\lambda)v, v \rangle - \langle E(\lambda - \delta)v, v \rangle] \quad (*)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\lambda} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle &= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &\quad + \int_{-\pi+\delta}^{\lambda-\delta} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle + \int_{\lambda-\delta}^{\lambda} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \end{aligned}$$

Znowu skrajne całki można oszacować tak jak w (\*). Korzystając z mocnej lewostronnej ciągłości  $t \mapsto E(t)$  dla  $-\pi < t < \pi$  oraz z faktu, że  $\lim_{t \rightarrow -\pi+} E(t)v = 0$  otrzymujemy tezę.  $\square$

**Uwaga.** Załóżmy, że  $h = |g|^2$  dla funkcji ciągłej  $g$ . Wzór oznacza, że

$$\langle E(\lambda)g(U)v, g(U)v \rangle = \langle g(U)^*g(U)E(\lambda)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\lambda} |g(e^{it})|^2 d\langle E(t)v, v \rangle \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

czyli

$$d\langle E(\lambda)g(U)v, g(U)v \rangle = |g(e^{i\lambda})|^2 d\langle E(\lambda)v, v \rangle$$

Zatem całki Riemanna-Stieltjesa funkcji ciągłych względem obu stron są takie same.

**Definicja 6.10.** Rodzinę  $\{E(\lambda)\}_{-\pi \leq \lambda \leq \pi}$  nazywamy rozkładem spektralnym operatora  $U$ .

**Uwaga Wzór**

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dE(t)$$

przypomina rozkład diagonalny macierzy. Symbol  $dE(t)$  jest infinitezymalnym rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń związaną z wartością  $e^{it}$ . Rzuty  $dE(t)$  i  $dE(s)$  są do siebie ortogonalne dla  $t \neq s$  oraz

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} dE(t)$$

**Przykład**

- (a)  $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$ ,  $(Uh)(e^{it}) = e^{it}h(e^{it})$ . Wtedy  $[f(U)h](e^{it}) = f(e^{it})h(e^{it})$ . Jeśli  $f_n(e^{it})$  jest rosnącym ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym punktowo do  $\mathbb{1}_{(-\pi, \lambda)}(e^{it})$ , dla  $-\pi < \lambda < \pi$ , to ciąg operatorów  $f_n(U)$  jest zbieżny mocno do operatora

$$[E(\lambda)f](e^{it}) = \mathbb{1}_{(-\pi, \lambda)}(e^{it})f(e^{it})$$

Ponadto  $\lim_{\lambda \rightarrow \pi^-} E(\lambda) = I$  oraz  $E(-\pi) = 0$ .

- (b) Niech  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  oraz  $(U\delta_k) = e^{it_k}\delta_k$  dla  $-\pi < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq \pi$ . Tzn.  $U$  jest macierzą diagonalną o wartościach własnych  $e^{it_k}$ . Funkcje  $\mathbb{1}_{(-\pi, \lambda)}(e^{it})$  są ciągłe poza punktami  $\{t_k\}_{k=1}^n$ . Zatem

$$E(\lambda)\delta_k = \mathbb{1}_{(-\pi, \lambda)}(e^{it})\delta_k, \quad \lambda \neq t_k, \quad -\pi < \lambda < \pi$$

Z lewostronnej ciągłości wzór jest spełniony dla  $-\pi < \lambda < \pi$ . Zauważmy, że  $E(\lambda)$  jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń wektorów własnych o wartościach własnych  $e^{it}$ , dla  $-\pi < t < \lambda$ , dla  $-\pi < \lambda < \pi$ .

## 7 Rozkład spektralny operatora samosprężonego

Dla operatora samosprężonego  $A$  rozważamy transformatę Cayleya  $A = i(I - U)(I + U)^{-1}$ . Niech  $\{E(\lambda)\}_{-\pi \leq \lambda \leq \pi}$  będzie rozkładem jedności związanym



z operatorem  $U$ . Ponieważ liczba  $-1$  nie jest wartością własną operatora  $U$ , to funkcja  $\lambda \mapsto E(\lambda)$  jest lewostronnie ciągła również w punkcie  $\pi$ . Funkcję

$$(-\pi, \pi) \ni \lambda \mapsto i \frac{1 - e^{i\lambda}}{1 + e^{i\lambda}} = \tan(\lambda/2) \in \mathbb{R}$$

Ze wzoru  $h$  jest ciągła i ściśle rosnąca. Dla  $x \in \mathbb{R}$  określmy  $F(x) = E(2 \arctan x)$ . Wtedy

$$F(\operatorname{tg}(t/2)) = E(t), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = I$$

Ponadto  $F(x)$  jest niemalejącą lewostronnie mocno ciągłą rodziną rzutów ortogonalnych.

**Lemat 7.1.** *Zachodzi równość*

$$\operatorname{Ran}(I + U) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle < \infty \right\}$$

przy czym całka niewłaściwa jest traktowana jako granica lub supremum właściwych całek Riemanna-Stieltjesa

$$\lim_n \int_{-\pi + \frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle$$

*Dowód.* Całka niewłaściwa jest dobrze określona, bo miara  $d\langle E(t)v, v \rangle$  nie ma atomu w punkcie  $\pi$ . Niech  $v = \operatorname{Ran}(I + U)$ . Wtedy  $v = (I + U)w$  dla pewnego  $w \in \mathcal{H}$ . Zatem z uwagi na temat równości całek Riemanna-Stieltjesa otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} d\langle (E(t)(I + U)w, (I + U)w) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} |1 + e^{it}|^2 d\langle E(t)w, w \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\langle E(t)v, v \rangle = \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

To dowodzi zawierania  $\supseteq$ .

Założmy, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle < \infty$$

Niech  $a_n = -\pi + \frac{1}{n}$  oraz  $b_n = \pi - \frac{1}{n}$ . Oznaczmy

$$f_n(e^{it}) = \frac{1}{1+e^{it}} [\mathbb{1}_{(-\pi, b_n)}(e^{it}) - \mathbb{1}_{(-\pi, a_n)}(e^{it})], \quad g_n(e^{it}) = \mathbb{1}_{(-\pi, b_n)}(e^{it}) - \mathbb{1}_{(-\pi, a_n)}(e^{it})$$

oraz  $w_n = f_n(U)v$ . Pokażemy, że ciąg  $w_n$  jest zbieżny. Dla  $n > m$  mamy

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\|^2 &= \langle f_n(U)v - f_m(U)v, f_n(U)v - f_m(U)v \rangle = \langle |f_n - f_m|^2(U)v, v \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(e^{it}) - f_m(e^{it})|^2 d\langle E(t)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1+e^{it}|^2} [g_n(e^{it}) - g_m(e^{it})] d\langle E(t)v, v \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1+e^{it}|^2} g_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1+e^{it}|^2} g_m(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &\leq \int_{-a_{n+1}}^{b_{n+1}} \frac{1}{|1+e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle - \int_{-a_{m-1}}^{b_{m-1}} \frac{1}{|1+e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle \end{aligned}$$

Oba odejmowane składniki są zbieżne do

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1+e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle$$

gdy  $m \rightarrow \infty$ .

Niech  $w = \lim_n w_n$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} (I + U)w_n &= (I + U)f_n(U)v \\ &= (1 + z)(U)f_n(U)v = [(1 + z)f_n](U)v = g_n(U)v \rightarrow v \end{aligned}$$

Zatem  $(I + U)w = v$ , czyli  $v \in \text{Ran}(I + U)$ . □

**Uwaga** Dla  $-\pi < a < b < \pi$  i  $g(e^{it}) = \mathbb{1}_{(a,b)}(e^{it})$  mamy

$$g(U) = E(b) - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} E(a + \delta)$$

Rzeczywiście

$$\mathbb{1}_{(-\pi, b)} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathbb{1}_{(-\pi, a+\delta)} + \mathbb{1}_{(a,b)}$$

**Twierdzenie 7.2.** Dla operatora samosprężonego mamy

$$D(A) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\langle F(x)v, v \rangle < \infty \right\}$$

*Dowód.* Niech  $v \in D(A)$ . Z lematu dostajemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle < \infty$$

Zatem stosując podstawienie  $x = \tan(t/2) = i \frac{1 - e^{it}}{1 + e^{it}}$  otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\langle F(x)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1 - e^{it}|^2}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle \leq 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle < \infty$$

Dla dowodu przeciwnego zawierania załóżmy, że  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\langle F(x)v, v \rangle < \infty$ .

Wtedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4}{|1 + e^{it}|^2} d\langle E(t)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{|1 - e^{it}|^2}{|1 + e^{it}|^2}\right) d\langle E(t)v, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2) d\langle F(x)v, v \rangle < \infty$$

Zatem  $v \in D(A)$ . □

**Twierdzenie 7.3.** Dla operatora samosprężonego  $A$  mamy

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

który z definicji oznacza, że dla  $v \in D(A)$  zachodzi

$$\langle Av, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x d\langle F(x)v, v \rangle$$

**Uwaga.** Całka jest bezwzględnie zbieżna, bo  $|x| \leq (1 + x^2)/2$ .

*Dowód.* Dla  $a_n = -\pi + \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \pi + \frac{1}{n}$  określmy  $c_n = \tan(a_n/2)$ ,  $d_n = \tan(b_n/2)$ . Niech  $h_n(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, d_n)}(x) - \mathbb{1}_{(-\infty, c_n)}(x)$ . Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) x d\langle F(x)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g_n(e^{it}) i \frac{1 - e^{it}}{1 + e^{it}} d\langle E(t)v, v \rangle$$

Wiemy, że  $v = (I + U)w$  dla pewnego  $w \in \mathcal{H}$  oraz

$$d\langle E(t)(I + U)w, (I + U)w \rangle = |1 + e^{it}|^2 d\langle E(t)w, w \rangle$$

Zatem ostatnia całka jest równa (wg oznaczeń z dowodu poprzedniego twierdzenia 7.1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(e^{it}) i (1 - e^{it})(1 + e^{-it}) d\langle E(t)v, v \rangle$$

W granicy otrzymujemy ( $\lim_{t \rightarrow \pi^-} E(t)v = v = E(\pi)v$ )

$$\int_{-\pi}^{\pi} i (1 - e^{it})(1 + e^{-it}) d\langle E(t)v, v \rangle = i \langle (I - U)(I + U^*)w, w \rangle = i \langle (I - U)w, v \rangle$$

Ale

$$Av = A(I + U)w = i(I - U)w$$

Zatem w wyniku dostajemy  $\langle Av, v \rangle$ . □

Określmy  $\mathcal{H}_n = [F(n) - F(-n)]\mathcal{H}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $\mathcal{H}_n$  jest domkniętą podprzestrzenią w  $\mathcal{H}$  jako obraz  $\mathcal{H}$  pod działaniem rzutu ortogonalnego. Ponadto  $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1}$  oraz

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n} = \mathcal{H}$$

bo

$$\lim_n [F(n) - F(-n)]v = v$$

**Lemat 7.4.** *Mamy  $\mathcal{H}_n \subset D(A)$  oraz  $A(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n$ .*

*Dowód.* Niech  $v \in \mathcal{H}_n$ . Określmy  $P_n = F(n) - F(-n)$ . Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\langle F(x)v, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\langle P_n F(x) P_n v, v \rangle$$

Przyrosty funkcji  $x \mapsto \langle P_n F(x) P_n v, P_n v \rangle$  są zerowe dla  $|x| \geq n$ , bo

$$\begin{aligned} F(x)P_n &= F(x)[F(n) - F(-n)] = F(n) - F(-n), & x \geq n \\ F(x)P_n &= F(x)[F(n) - F(-n)] = F(x) - F(x) = 0, & x \leq -n \end{aligned}$$

Zatem całka jest ograniczona z góry przez  $n^2\|P_nv\|^2 = n^2\|v\|^2$ , bo dla  $|x| \leq n$  mamy

$$0 = P_n F(-n) P_n \leq P_n F(n) P_n = P_n$$

Dla  $v \in D(A)$  mamy  $v = (I + U)w$  dla pewnego  $w \in \mathcal{H}$ . Zatem

$$AP_nv = AP_n(I + U)w = A(I + U)P_nw = i(I - U)P_nw = iP_n(I - U)w$$

Stąd wynika, że jeśli  $v \in \mathcal{H}_n$ , to  $Av \in \mathcal{H}_n$ .  $\square$

**Twierdzenie 7.5.** *Operator  $A : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$  jest ograniczony oraz  $\|A\|_{\mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n} \leq n$ .*

*Dowód.* Niech  $v \in \mathcal{H}_n$ . Wtedy

$$\langle Av, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x d\langle F(x)v, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x d\langle F(x)P_nv, P_nv \rangle$$

Ponieważ przyrosty są zerowe dla  $|x| > n$ , to

$$|\langle Av, v \rangle| \leq n \int_{-\infty}^{\infty} d\langle F(x)v, v \rangle = n\|v\|^2$$

Ze wzoru polaryzacyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Av, w \rangle &= \frac{1}{4} [\langle A(v+w), v+w \rangle - \langle A(v-w), v-w \rangle] \\ &\leq \frac{n}{4} [\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2] = \frac{n}{2} [\|v\|^2 + \|w\|^2] \end{aligned}$$

Dla liczby  $s > 0$  otrzymujemy zatem

$$\operatorname{Re} \langle Av, w \rangle = \operatorname{Re} \langle A(sv), s^{-1}w \rangle \leq \frac{n}{2} [s^2\|v\|^2 + s^{-2}\|w\|^2]$$

Przyjmując  $s^2 = \|w\|/\|v\|$  dostajemy

$$\operatorname{Re} \langle Av, w \rangle \leq n\|v\| \|w\|$$

Mamy  $\langle Av, w \rangle = e^{i\theta} |\langle Av, w \rangle|$ . Wtedy

$$|\langle Av, w \rangle| = \operatorname{Re} \langle A(v, e^{i\theta}w) \rangle \leq n\|v\| \|e^{i\theta}w\| = n\|v\| \|w\|$$

Zatem  $\|A\| \leq n$  na  $\mathcal{H}_n$ .  $\square$

Założmy, że  $A$  jest ograniczonym operatorem samosprężonym. Ze wzoru  $A = i(I - U)(I + U)^{-1}$  wynika

$$(I + U)^{-1} = -\frac{i}{2}(A + iI)$$

Zatem operator  $I + U$  jest odwracalny, czyli  $-1 \notin \sigma(U)$ . To oznacza, że

$$\sigma(U) \subset \{e^{it} : 2\arctg(a) < t < 2\arctg(b)\}$$

dla pewnych liczb rzeczywistych  $a < b$ . Wiemy, że  $F(a) = E(2\arctg(a)) = 0$  oraz  $F(b) = E(2\arctg(b)) = I$ . Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą na  $\mathbb{R}$ . Oznaczmy  $\varphi(t) = i(1 - e^{it})(1 + e^{it})^{-1} = \operatorname{tg}(t/2)$ . Funkcja  $\varphi(t)$  jest ciągła na  $[a, b]$  oraz  $A = \varphi(U)$ . Zatem

$$\sigma(A) = \sigma(\varphi(U)) = \varphi(\sigma(U)) \subset (a, b)$$

Funkcja  $f \circ \varphi$  jest ciągła i ograniczona na  $\sigma(U)$ . Otrzymujemy więc

$$f(A) = f(\varphi(U)) = (f \circ \varphi)(U) = \int_{2\arctg(a)}^{2\arctg(b)} (f \circ \varphi)(t) dE(t) = \int_a^b f(x) dF(x)$$

W szczególności

$$A = \int_a^b f(x) dF(x)$$

Wiemy, że sumy całkowe pierwszej całki są zbieżne w normie. To samo dotyczy więc drugiej całki, która otrzymana jest przez ciągłe podstawienie  $x = \operatorname{tg}(t/2)$ . Niech  $c = \min \sigma(A)$  oraz  $d = \max \sigma(A)$ . Ze wzoru na  $A$  otrzymujemy, że  $F(x) = 0$  dla  $x < c$  oraz  $F(x) = I$  dla  $x > d$ . Funkcja  $F(x)$  jest mocno lewostronnie ciągła. Zatem  $F(c) = 0$  oraz  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} F(d + \delta) = I$ .

Określając  $F(d) = I$  otrzymamy

$$f(A) = \int_c^d f(x) dF(x)$$

bo sumy całkowe są takie same jak dla całki po przedziale  $[a, b]$  jeśli przyjmiemy, że podział całki względem  $[a, b]$  zawiera  $c$  i nie zawiera  $d$ .

Ze wzoru wynika, że jeśli ciąg funkcji ciągłych  $f_n \rightarrow f$  jest zbieżny jednostajnie na  $[c, d]$ , to  $f_n(A) \rightarrow f(A)$  w normie.

Poprzez podstawienie  $x = \operatorname{tg}(t/2)$  lub poprzez zastosowanie podobnego dowodu do Twierdzenia 6.8 uzyskamy

**Twierdzenie 7.6.**

- (a) Dla  $c \leq x \leq d$  jeśli  $F(x - \delta) = F(x + \delta)$ , dla pewnej liczby  $\delta > 0$ , to  $x \notin \sigma(A)$ .
- (b) Dla  $c \leq x \leq d$ , jeśli  $x \notin \sigma(A)$ , to  $F(x - \delta) = F(x + \delta)$  dla pewnej liczby  $\delta > 0$ .

Dla  $c \leq x < d$  określamy

$$P_x = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [F(x + \delta) - F(x)], \quad P_d = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [I - F(d - \delta)]$$

Wtedy  $P_x$  są rzutami jako mocne granice przemienionych rzutów.

**Twierdzenie 7.7.** Operator  $P_x$  jest rzutem na podprzestrzeń wektorów własnych operatora  $A$  odpowiadających wartości własnej  $x$ .

Dla wektora  $v$  rozważamy lewostronnie ciągłą funkcję niemalejącą  $[c, d] \ni x \mapsto \langle F(x)v, v \rangle$ . Z teorii miary wiemy, że ta funkcja wyznacza miarę borelowską na przedziale  $[c, d]$ . Z poprzedniego twierdzenia wynika, że miara miara zeruje się na przedziałach otwartych rozłącznych z  $\sigma(A)$ . Wtedy

$$\langle f(A)v, v \rangle = \int_{\sigma(A)} f(x) d\langle F(x)v, v \rangle$$

Dlatego stosuje się zapis

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(x) dF(x)$$

Dla  $u, w \in \mathcal{H}$  mamy

$$\begin{aligned} \langle f(A)v, w \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \langle f(A)(v + i^k w), v + i^k w \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \int_a^b f(x) d\langle F(x)(v + i^k w), v + i^k w \rangle \end{aligned}$$

To oznacza, że prawa strona jest ograniczoną formą półtoraliniową. Dla ograniczonej funkcji borelowskiej  $g(x)$  na  $[a, b]$  istnieje ciąg wspólnie ograniczonych funkcji ciągłych  $f_n(x)$  zbieżny prawie wszędzie do  $g(x)$ . Wtedy prawa

strona jest zbieżna, więc lewa też. Czyli ciąg operatorów  $f_n(A)$  jest  $*$ -słabo zbieżny do pewnego operatora  $g(A)$ . Wtedy

$$\langle g(A)v, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \int_a^b g(x) d\langle F(x)(v + i^k w), v + i^k w \rangle$$

Ze wzoru wynika, że prawa strona jest formą półtoraliniową. Otrzymujemy

$$\langle g(A)v, v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \int_a^b g(x) d\langle F(x)(v + i^k v), v + i^k v \rangle = \int_a^b g(x) d\langle F(x)v, v \rangle$$

Stosujemy wtedy zapis

$$g(A) = \int_a^b g(x) dF(x)$$

### Lemat 7.8.

- (a) Dla operatora unitarnego  $U$ , ograniczonego operatora  $T$  oraz funkcji  $f \in C(\mathbb{T})$  jeśli  $TU = UT$ , to  $Tf(U) = f(U)T$ . Ponadto  $TE(\lambda) = E(\lambda)T$ .
- (b) Dla ograniczonego operatora samosprężonego  $A$ ,  $\sigma(T) \subset [c, d]$ , funkcji  $f \in C[c, d]$  oraz ograniczonego operatora  $T$ , jeśli  $TA = AT$ , to  $Tf(A) = f(A)T$  oraz  $TF(x) = F(x)T$ .

Rozważmy ograniczony operator normalny  $T$ . Wtedy  $T = A + iB$ , gdzie  $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$  oraz  $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ . Operatory  $A$  i  $B$  są samosprężone i przemienne. Wiemy, że jeśli  $z = x + iy \in \sigma(T)$ , to  $x \in \sigma(A)$  oraz  $y \in \sigma(B)$ . Zawieranie odwrotne nie musi być spełnione.

Niech  $\{F_A(x)\}_{x=c_A}^{d_A}$  oraz  $\{F_B(y)\}_{y=c_B}^{d_B}$  będą rodzinami rzutów związanych z  $A$  i  $B$ , odpowiednio. Ponieważ  $B$  jest przemienne z  $A$ , to również z  $F_A(x)$ . Zatem  $F_B(y)$  jest przemienne z  $F_A(x)$ . Dla funkcji ciągłych  $f(x)$  i  $g(y)$  na  $[c_A, d_A]$  oraz  $[c_B, d_B]$ , odpowiednio, otrzymujemy

$$f(A) = \int_{c_A}^{d_A} f(x) dF_A(x) = \int_{c_A}^{d_A} f(x) dF_A(x) \cdot \int_{c_B}^{d_B} dF_B(y) = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} f(x) dF_A(x) dF_B(y)$$

przy czym całkę podwójną traktujemy jako granicę sum całkowych względem prostokątów  $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ . Sumy całkowe są wtedy zbieżne w normie



do  $f(A)$ . Podobnie

$$g(B) = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} f(x) dF_A(x) dF_B(y)$$

Przez pomnożenie (rozważając zbieżność sum całkowych) otrzymujemy

$$f(A)g(B) = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} f(x)g(y) dF_A(x) dF_B(y)$$

Dla funkcji  $h(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{n,m} x^n y^m$  dostajemy

$$h(A, B) = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} h(x, y) dF_A(x) dF_B(y)$$

Z liniowości uzyskujemy

$$\begin{aligned} T^n &= (A + iB)^n = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} (x + iy)^n dF_A(x) dF_B(y) \\ (T^*)^n &= (A - iB)^n = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} (x - iy)^n dF_A(x) dF_B(y) \end{aligned}$$

Jeśli  $p(z, \bar{z})$  jest wielomianem zmiennej  $z$ , to

$$p(T, T^*) = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} p(z, \bar{z}) dF_A(x) dF_B(y)$$

Z kolei jeśli funkcja  $f(z)$  określona na  $[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]$  jest granicą jednostajną wielomianów postaci  $p(z, \bar{z})$  to

$$f(T) = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} f(z) dF_A(x) dF_B(y)$$

W szczególności

$$T = \iint_{[c_A, d_A] \times [c_B, d_B]} (x + iy) dF_A(x) dF_B(y)$$

Rozważając sumy częściowe można udowodnić

**Twierdzenie 7.9.** Dla  $c_A \leq x \leq d_A$ ,  $c_B \leq y \leq d_B$

- (a) Jeśli  $F_A(x - \delta) = F_A(x + \delta)$  lub  $F_B(y - \delta) = F_B(y + \delta)$  dla pewnej liczby  $\delta > 0$ , to  $x + iy \notin \sigma(T)$ .
- (b) Jeśli  $x + iy \notin \sigma(T)$ , to  $F_A(x - \delta) = F_A(x + \delta)$  lub  $F_B(y - \delta) = F_B(y + \delta)$  dla pewnej liczby  $\delta > 0$ .