Konkurs olimpijski KUMAM, dzień 2

Instytut Matematyczny UWr, 02.02.2018

Zadanie 5. Król Artur na nadchodzące walentynki postanowił urządzić ucztę. Na ucztę ma przyjść k dzielnych rycerzy, każdy z damą swojego serca. Goście usiądą przy okrągłym stole o n nierozróżnialnych miejscach. Na ile sposobów Król może ustawić gości, jeżeli zakochani mają siedzieć obok siebie?

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ABC. Oznaczamy spodki wysokości wychodzące z wierzchołków A, B, C jako odpowiednio D, E, F. Prosta EF przecina okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach X, Y. Udowodnij, że $|AX| = |AY|$.

(*) Proste BX i DF przecinają się w punkcie K, a proste CY i DE w punkcie L. Wykaż, że $|AX| = |AY| = |AK| = |AL|$.

Zadanie 7. Dla ustalonego n wyznacz największą wartość sumy liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots x_n$ spełniających warunek:

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 \leq 29n.$$

Zadanie 8. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $4k+1$. Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{i^2}{p} \right\}.$$