Konkurs olimpijski KUMAM, dzień 1

Instytut Matematyczny UWr, 01.02.2018

Zadanie 1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym opisanym na okręgu. Ponadto, niech K, L będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do boków AB i BC, a M, N będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ADC do boków AD i DC. Wykaż, że czworokąt $KLMN$ można wpisać w okrąg.

Zadanie 2. Dana jest liczba pierwsza $p \geq 5$. Liczby całkowite dodatnie a, b spełniają równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{p-3}{p-1} = \frac{a}{b}.$$

Dowieść, że $p|a$.

Zadanie 3. Niech funkcja f będzie dana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Wyznaczyć zbiór takich $r \in \mathbb{R}$, że istnieje taka trójka dodatnich liczb rzeczywistych (x, y, z), że $f(x, y, z) = r$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek: Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots 2n\}$ isnieje ciąg parami różnych liczb $j_1, j_2, \ldots j_n \in \{1, 2, \ldots 2n\}$ różnych od i takich, że $a_i + a_{j_l} \leq 2$ dla każdego $l \in \{1, 2, \ldots n\}$. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i \leq 2n. \tag{1}$$