INWERSJA – KÓŁKO OLIMPIJSKIE

1. Skonstruuj okrąg styczny do danego okręgu, przechodzący przez dwa dane punkty.

2. Skonstruuj okrąg styczny do dwóch danych, przechodzący przez dany punkt.

3. (Zadanie Apoloniusza) Skonstruuj okrąg styczny do trzech danych okręgów.

4. Skonstruuj okrąg prostopadły do dwóch danych okręgów, przechodzący przez dany punkt.

5. Udowodnij, że istnieje inwersja przekształcająca dwa nie przecinające się okręgi na okręgi koncentryczne.

6. Skonstruuj okrąg prostopadły do dwóch danych okręgów, styczny do trzeciego okręgu.

7. Dany jest okrąg o środku O i dwie cięciwy MN i M'N' o równych długościach. Przedłużenia tych cięciw przecinają się w punkcie A. Udowodnij, że A' – punkt przecięcia MN' i NM' jest obrazem A w inwersji względem wyjściowego okręgu.

8. Dane dwa okręgi przecinające się w punkcie A są styczne do danych prostych w punktach B_1, C_1, B_2,C_2 odpowiednio (styczność S_1 i S_2 musi być w B_1, B_2 oraz C_1, C_2 tego samego rodzaju). Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach AB_1C_1 i AB_2C_2 są styczne.

9. Dane są cztery okręgi S_1,S_2,S_3,S_4 . S_1 i S_3 przecinają się z S_2 i S_4. Udowodnij, że jeśli punkty przecięcia S_1 z S_2 i S_3 z S_4 leżą na jednym okręgu, to punkty przecięcia S_1 z S_4 i S_2 z S_3 też.

10. Cztery okręgi przecinają się parami. Udowodnij, że jeżeli „zewnętrzne" punkty przecięcia leżą na okręgu, to „wewnętrzne" też.

11. Przez punkty A i B prowadzimy okręgi S_1 i S_2 styczne do okręgu S i okrąg S_3 prostopadły do okręgu S. Udowodnij, że S_3 tworzy równe kąty z okręgami S_1 i S_2.

12. Dane są punkty A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Udowodnij, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach $A_1A_2B_3$, $A_2A_3B_1$, $A_1A_3B_2$ przechodzą przez jeden punkt, to okręgi opisane na $B_1B_2A_3$, $B_2B_3A_1$, $B_1 A_2B_3$ też.

13. Cztery proste przecinają się tworząc cztery trójkąty. Udowodnij, że okręgi na nich opisane przecinają się w jednym punkcie (punkt Michaela).

14. Dane są punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Udowodnij, że jeśli okręgi opisane na trójkątach $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ przecinają się w jednym punkcie, to okręgi opisane na trójkątach $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$ też.