TEORIA LICZB 1
I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Michał Szachniewicz

grudzień 2016, Bardo

1. Pokaż, że:
   (a) dla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ istnieje $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ (najmniejsza wspólna wielokrotność);
   (b) jeśli $a_i|d$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to $[a_1, a_2, \ldots, a_n]|d$.
2. Pokaż, że:
   (a) dla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ istnieje $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d_s$ (największy wspólny dzielnik);
   (b) jeśli $d|a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to $d|d_s$; wskazówka: niech $N = [d, d_s]$, skorzystaj z 1(b).
3. Niech $(a, b) = d$. Pokaż, że:
   (a) $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$,
   (b) jeśli $d = 1$ i $c|a$ to $(c, b) = 1$.
4. Pokaż, że:
   (a) $(a_1 a_2 \ldots a_n + 1, a_i) = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$;
   (b) dla ciągu $F_k = 2^{2^k} + 1$ wszystkie wyrazy są względnie pierwsze (wskazówka: $F_n|2^{2^{n+1}}$);
   (c) jeśli m, n naturalne i pierwsza z nich nieparzysta, to $(2^m + 1, 2^n - 1) = 1$;
   (d) * jeśli istnieje liczba naturalna a taka, że $n|2^a - 1$ oraz $k|2^a + 1$ dla pewnych liczb nieparzystych n i k, to nie istnieje naturalne b takie, że $n|2^b + 1$ oraz $k|2^b - 1$.
5. Pokaż, że $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$ (wskazówka: $N = [a, b]$, to $N|ab$).
6. Zasadnicze twierdzenie artmetyki: Jeśli $(a, b) = 1$ i $b|ac$, to $b|c$.
7. Wykaż kilka wniosków z 6:
   (a) jeśli $a|c$ oraz $b|c$ i $(a, b) = 1$, to $ab|c$;
   (b) jeśli $(a, b) = (a, c) = 1$, to $(a, bc) = 1$ (rozważ $(a, bc) = d$ oraz $(b, d) = d_1$);
   (c) jeśli $(a, b) = 1$, to $(a^n, b) = 1$ oraz dalej $(a^n, b^n) = 1$;
   (d) jeśli $a^n|b^n$, to $a|b$. Wywnioskuj z tego, że jesli $(\frac{p}{q})^n$ jest naturalne, to $q = 1$.
8. Pokaż, że rozkład liczby na czynniki pierwsze jest jednoznaczny.
9. * Pokaż, że:
   (a) jeśli $(a, b) = 1$ oraz m naturalne, to istnieje nieskończenie wiele k, że $(m, a + bk) = 1$;
   (b) jeśli $(a, b) = 1$, to ciąg $a + bk$ ma nieskończenie wiele wyrazów względnie pierwszych ze sobą.
10. Pokaż, że:
    (a) $[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}] = [[a_1, a_2, \ldots, a_n], a_{n+1}]$,
    (b) $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = ((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1})$.
11. Wykaż, że dla liczb naturalnych a, b takich, że $(a, b) = d$ istnieje para liczb całkowitych x, y, że $ax + by = d$.
12. * Pokaż, że jeśli w jest liczbą wymierną i w^w jest liczbą wymierną, to w jest naturalne.
13. Pokaż, że jeśli $(a, b) = 1$, to istnieją takie liczby naturalne u, v, że $au - bv = 1$ oraz, że każdą liczbę n większą od ab można zapisać w postaci $n = ax + by$ dla pewnych x, y naturalnych (wskazówka: znajdź liczbę całkowitą pomiędzy $\frac{nv}{a}$, a $\frac{nu}{b}$).
14. Pomyśl nad niektórymi zadaniami z 250 zadań Sierpińskiego: $8, 12, 13, 16, 20^*, 17^*, 18^*$.