Niezmienniki, półniezmienniki i Dirichlet

Dla wszystkich

1. Czy kostkami domina 2x1 można pokryć szachownicę 8x8 bez dwóch przeciwległych rogów?
2. Bierzemy liczbę 2016!. Obliczamy jej sumę cyfr, następnie obliczamy sumę cyfr powstałej liczby, i tak dalej, póki nie otrzymamy liczby jednocyfrowej. Jaka to liczba?
3. Na każdym polu szachownicy 11x11 leży moneta. Każdą monetę przesuwamy na sąsiadujące z nią pole. Pokaż, że po tej operacji przynajmniej jedno pole pozostanie puste.
4. W każdym polu szachownicy 8x8 wpisujemy liczbę rzeczywistą. W jednym ruchu bierzemy wszystkie liczby z jednego rzędu bądź kolumny i zmieniamy znak każdej z nich na przeciwny. Czy w pewnej liczbie ruchów możemy doprowadzić do tego, że suma liczb w każdym rzędzie i każdej kolumnie będzie nieujemna?
5. Adam i Bogdan grają w grę: na stole leży 2016 patyczków. Gracze na przemian zabierają ze stołu 1, 2, 3 lub 4 patyczki. Ten, kto zabierze ostatni patyczek, przegrywa. Jeżeli zaczyna Adam, to czy któryś z graczy może zawsze wygrać?
6. Na tablicy jest zapisane 10 znaków $+$ i 15 znaków $-$. W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i dopisujemy $+$, jeżeli starte znaki były takie same, i $-$, jeżeli starte znaki były różne. Po 24 ruchach na tablicy zostanie jeden znak. Jaki?
7. Na płaszczyźnie znajduje się $2n$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Pokaż, że można narysować n odcinków o końcach w tych punktach tak, by każdy punkt należał do dokładnie jednego odcinka i by żadne dwa odcinki się nie przecinały.
8. Przy okrągłym stole siedzi 14 rycerzy. Na początku jeden z rycerzy ma 14 złotych monet. W dowolnym momencie rycerz, który posiada przynajmniej dwie monety może wziąć dwie z nich i rozdać po jednej każdemu rycerzowi siedzącemu obok niego. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie każdy rycerz będzie miał po jednej monecie?
9. Przy innym okrągłym stole siedzi kolejnych 14 rycerzy. Tym razem na początku każdy ma po jednej monecie. W jednym ruchu jeden rycerz przekazuje jedną monetę swojemu sąsiadowi z lewej, a inny - jedną monetę sąsiadowi z prawej. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie pewien rycerz będzie miał 14 monet?
10. Na pewnej wyspie żyje 13 żółtych, 15 zielonych i 17 czerwonych kameleonów. Kiedy spotkają się dwa kameleony różnego koloru, oba zmieniają kolor na trzeci. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie wszystkie kameleony na wyspie będą miały ten sam kolor?
11. Pokaż, że w grupie 2016 osób przynajmniej dwie osoby mają tę samą liczbę znajomych (przy czym jeżeli A jest znajomym B, to B jest też znajomym A).
12. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na zielono lub czerwono. Pokaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe dokładnie o 1.
13. W kole o promieniu 1 rysujemy 7 punktów. Pokaż, że co najmniej dwa z nich są odległe od siebie o nie więcej niż 1.
14. (*) W kole o promieniu 1 rysujemy 7 punktów tak, że odległość dowolnych dwóch z nich jest nie mniejsza niż 1. Pokaż, że jeden z tych punktów to środek koła.
15. Pokaż, że w grupie 6 osób są trzy, z których wszyscy są znajomymi lub trzy, z których nikt nie jest znajomym.

Dla ambitnych :)

1. Na tablicy zapisany jest ciąg liczb $\{1, 2, 3, ..., 2016\}$. W jednym ruchu zamieniamy miejscami dwie sąsiednie liczby. Czy w nieparzystej liczbie ruchów jesteśmy w stanie uzyskać ciąg $\{2016, 2015, ..., 1\}$?

2. Na tablicy zapisujemy liczby: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2016}$. W jednym ruchu zmazujemy dwie dowolne z nich (oznaczmy je przez a, b) i zastępujemy liczbą $a + b + ab$. Jaką liczbę możemy uzyskać po 2015 ruchach?

3. Na okręgu znajduje się n liczb. W jednym ruchu między każdymi dwoma sąsiednimi liczbami zapisujemy ich największy wspólny dzielnik, a następnie zmazujemy poczatkowe liczby. Pokaż, że po skończonej liczbie ruchów wszystkie liczby na okręgu będą równe.

4. Dany jest zbiór $\{1, 2, 3, ..., 100\}$. Wybieramy z niego 51 liczb. Pokaż, że:
   (a) Różnica pewnych dwóch z nich wynosi 1.
   (b) Pewne dwie są względnie pierwsze.
   (c) Istnieją takie dwie, że jedna jest podzielna przez drugą.

5. Na spotkanie absolwentów XIV LO przyjechało 17 osób. Każda rozmawiała z każdą na jeden z trzech tematów i każda para rozmawiała tylko na jeden temat. Pokaż, że jest wśród nich trójka absolwentów, z których wszyscy rozmawiali między sobą na ten sam temat.

6. (*) Dane są liczby $0, 1, \sqrt{2}$. W jednym ruchu zmazujemy jedną z nich i zastępujemy różnicą dwóch pozostałych pomnożoną przez dowolną liczbę wymierną. Czy w skończonej liczbie ruchów jesteśmy w stanie uzyskać liczby $0, 2, \sqrt{2}$ (niekoniecznie w tej kolejności)?

7. Na tablicy zapisano słowo *abdc* w jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, końcu lub w środku słowa) palindrom parzystej długości zbudowany z liter a, b, c, d. Czy można w skończonej liczbie ruchów uzyskać słowo *bacd*?

8. Pokaż, że wśród 12 kolejnych liczb naturalnych istnieje taka, która nie jest sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych.