Bardo, grudzień 2016

CIĄGI I REKURENCJE

Jednym ze słynniejszych problemów rekurencyjnych jest problem wież z Hanoi:
"U zarania czasu Bóg umieścił 64 złote krążki na pierwszej z trzech diamentowych iglic tak, że krążki wyżej umieszczone miały mniejsze promienie.

Następnie Bóg polecił grupie mnichów przełożenie tych krążków na trzecią iglicę, ale tak by:

- w jednym ruchu przenosić tylko jeden krążek,
- krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym,
- można posługiwać się środkową iglicą."

1. Pokaż jak przełożyć 4 krążki?

2. Ile minimalnie ruchów potrzeba, żeby przenieść n krążków? Jak mają się do siebie minimalna liczba ruchów dla $n-1$ i n krążków?

3. Mnisi pracują od zarania dziejów dzień i noc ... . Ile czasu im to zajmie, jeśli jednej doby przenoszą jeden krążek?

A teraz kilka zadań podobnych.

4. Jaka jest największa możliwa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

5. Dla każdego $n \geq 1$ niech j_n oznacza liczbę sposobów ułożenia n identycznych kostek domina o wymiarach 2cm x 1cm na prostokącie o wymiarach 2cm x n cm. Znaleźć zależność rekurencyjną dla j_n.

6. Dla każdego $n \geq 1$ niech t_n oznacza liczbę ciągów długości n zbudowanych z symboli a, b, c, w których dwie samogłoski nie występują obok siebie. Znaleźć zależność rekurencyjną dla t_n.

7. Dla każdego $n \geq 1$ niech s_n oznacza liczbę sposobów, na które można wciągnąć flagi trzech kolorów na n-metrowy maszt, zakładając, że flagi czerwone mają szerokość 2m, a pozostałe flagi 1m. Znaleźć zależność rekurencyjną dla s_n.

8. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$.

9. Mamy dany ciąg implikacji

$$((...((p_1 \implies p_2) \implies p_3) \implies ...) \implies p_n)$$

Każde zdanie p_n jest prawdziwe lub fałszywe. Ile jest możliwych układów, dla których powyższy ciąg implikacji jest prawdziwy?

Zobaczmy teraz jak sobie radzić z takimi rekurencjami liniowymi. Polecenie do poniższych zadań: znajdź wzór ogólny a_n.

10.

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -3a_n \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 2a_n - 5 \end{cases}$$

I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej, materiały przygotował: Marcin Preisner .

13.
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 5 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 20 \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -5 \\ a_{n+2} = -a_n \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} a_1 = 4\sqrt{2} \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - \sqrt{2}a_n \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} a_1 = -11\sqrt{2} \\ a_2 = -3 \\ a_3 = -43 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} + 12a_n \end{cases}$$

---

20. Znajdź ciągi u_n, t_n, jeśli:
$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ u_0 = 3 \\ t_{n+1} = 6t_n + 4u_n \\ u_{n+1} = t_n + 3u_n. \end{cases}$$
Wskazówka: Wyprowadź rekurencję dla jednego ciągu.

21. Znajdź wzór ogólny ciągu:
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, \qquad x_0 = 1.$$
Wskazówka: Zapisz $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ i znajdź układ rekurencji liniowych na a_n i b_n. Rozwiąż.

22. Znajdź wzór ogólny na ciąg:
$$y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n}, \qquad y_0 = 1.$$

23. Pokaż, że $y_n = x_{2^n-1}$ (ciągi z dwóch poprzednich zadań).

24. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:
$$a_{n+1} = 5\frac{3a_n + 1}{2a_n + 6},$$
gdzie $a_1 \in (1, \infty)$.
Wskazówka: Należy wykazać ograniczoność i monotoniczność ciągu.

25. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4a_n + 1},$$

gdzie $a_1 \in (1, \infty)$.
Wskazówka: Należy rozłożyć ciąg na dwa podciągi ograniczone i monotoniczne.

26. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1$$

dla przypadków: $a_1 \in (0, 2)$, $a_1 \in (2, \infty)$.

27. Ciąg (a_n) dany jest wzorem rekurencyjnym:

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dla jakich liczb wymiernych a_0 istnieją cztery różne wskaźniki k, m, p, q takie, ze $a_q - a_p = a_m - a_k$?
Wskazówka: Zacznij od znalezienia wzoru ogólnego.

28. Ciąg (x_n) określony jest wzorami:

$$x_1 = c$$

$$x_{n+1} = cx_n + \sqrt{(c^2 - 1)(x_n^2 - 1)} \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Dowieść, że jeśli c jest liczba naturalna, to wszystkie liczby x_n są naturalne.

29. Na szachownicy utworzonej przez podział kwadratu o boku n na kwadraty jednostkowe prostymi równoległymi do boków kwadratu rozpatrujemy wszystkie kwadraty, których boki zawarte sa w prostych wyznaczających szachownice. Niech $1 \le k \le n$ i $P(k, n)$ jest liczbą tych kwadratów, których długości boków nie przekraczają k. Niech $k(n)$ będzie największą spośród takich liczb k, ze $P(k, n) \le \frac{1}{2}P(n, n)$. Oblicz:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k(n)}{n}.$$

30. Rozważmy nieskończone ciągi (x_n) liczb dodatnich mające następujące własności:

$$x_0 = 1$$

$$x_{i+1} \le x_i \text{ dla każdego } i \ge 0$$

Udowodnij, że:

(a) Istnieje $n \ge 1$ takie, że:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \ge 3,999.$$

(b) Znajdź taki ciąg (x_n), że dla każdego n:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

31. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg (x_n) jest zadany przez:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \text{dla} n = 1, 2, \ldots .$$

Udowodnij, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$$

istnieje i policz ile wynosi.

32. Udowodnij, że istnieje liczba C_0 o następującej własności: dla każdego ciągu $(x_1, x_2, ..., x_N)$ liczb dodatnich i dla dowolnej liczby dodatniej K jeżeli liczba wyrazów x_j nie mniejszych od K jest większa od $\frac{N}{K}$, to:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \log x_j \leq C_0.$$

33. Niech S_n będzie zbiorem ciągów długości n o wyrazach $-1, 1$. Określamy funkcję $f : S_n \setminus \{(-1,1,1,1,...,1)\} \to S_n$ w następujący sposób:
jeśli $(a_1, ..., a_n) \in S_n \setminus \{(-1,1,1,1,...,1)\}$ oraz $k = \max_{1\leq j\leq n}\left\{j : a_1 a_2 ... a_j = 1\right\}$, to

$$f(a_1, ..., a_n) = (a_1, ..., a_{k-1}, -a_k, a_{k+1}, ..., a_n).$$

Udowodnij, że $f^{(2^n-1)}(1,1,...,1) = (-1,1,1,...,1)$ ($f^{(n)}$ oznacza n-krotne złożenie f ze sobą).

34. Dowieść, że:

(a) dla wszystkich liczb naturalnych n iloczyn

$$\Pi_{i=0}^{n}(2^{n+1-i}-1)^{2^i}$$

dzieli liczbę $(2^{n+1}-1)!$,

(b) wszystkie wyrazy ciągu (x_n) określonego wzorami:

$$x_1 = 1$$
$$x_n = \frac{4n-6}{n} x_{n-1}$$

gdzie $n = 2, 3, ...$ są liczbami naturalnymi.

35. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg jest zadany przez:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$$

dla $n = 1, 2, ...$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$$

istnieje i wyznacz tę granicę.

36. Dana jest liczba rzeczywista $a_1 > 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorem

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$$

dla $n \geq 1$. Dowiedź, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1 - 1}.$$

Wskazówka: Podstaw $b_n = a_n - 1$.