Zadania

O ile polecenie nie brzmi inaczej, zbadać strategię wygrywającą (np. podaj funkcję Sprague-Grundy'ego)

1. Dane są dwa niepuste pudłka, które początkowo zawierają odpowiednio n i m kamieni. Dwóch graczy wykonuje ruch opróżniając jedno pudełko i dzieląc zawartość drugiego w dowolny sposób tak, aby żadne nie było puste. Jest dokładnie jedna pozycja końcowa: $(1, 1)$. Czy istnieje strategia wygrywająca dla gry? Jakie są pozycje wygrywające dla tych gier w wersji misère?

2. Rozważmy grę, w której możesz zabrać c kamyków z stosiku liczącego ich n pod warunkiem, że c jest dzielnikiem n. Jest tylko jedna pozycja końcowa, czyli zero.

3. Załóżmy, że w powyższej grze nie wolno zabrać całego stosiku. Wtedy istnieje tylko jedna pozycja końcowa, jedynka.

4. Rozważ grę w której jest kilka stosików, gracze zaś mogą albo usunąć dowolną parzystą liczbę kamyków z dowolnego stosiku, albo usunąć dowolny stosik wysokości jeden. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu.

5. Rozważyć grę, w której gracz usuwa ze stosiku albo dowolną liczbę kamyków podzielną przez trzy (przy założeniu, że nie jest to cały stosik) albo cały stosik, przy założeniu że liczba kamyków daje resztę dwa z dzielenia przez trzy.

6. Dwaj gracze rysują kolejno przekątne 12-kąta foremnego, które się nie przecinają. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.

7. Na stole leży 9 żetonów z numerami od 1 do 9. Dwóch zawodników gra w następującą grę: pierwszy gracz w swoim ruchu usuwa ze stołu żeton z wybraną liczbą oraz wszystkie żetony z jej dzielnikami, następnie drugi wykonuje ruch wedle tych samych zasad, itd. Wygrywa zawodnik, który zdejmie ze stołu ostatni żeton. Który z graczy ma strategię wygrywającą i na czym może ona polegać?

8. Dany jest stosik kamyków. Pierwszy gracz może zabrać tyle kamyków ile chce, pod warunkiem, że zostawi conajmniej jeden. W kolejnych turach, dany gracz nie może wziąć więcej kamyków niż przeciwnik w poprzedniej turze. Przegrywa gracz niemogący wykonać ruchu.

9. **Nim Fibonacci** Zasady podobne do tych w poprzedniej grze, z tym że gracz może wziąć co najwyżej dwa razy tyle kamyków ile przeciwnik w poprzedniej turze. Analiza gry jest nieco trudniejsza i opiera się na liczbach Fibonacciego, w szczególności zaś na lemacie Zeckendorfa (każda dodatnia liczba całkowita może być jednoznacznie zapisana jako suma różnych, niesąsiednich liczb z ciągu Fibonacciego)

10. Gra SOS (28. Annual USA Mathematical Olympiad, 1999). Gra rozgrywana jest na pasku o n kratkach. Każdy z graczy pisze w pustą kratkę literkę S albo O. Ten, kto pierwszy osiągnie słowo SOS w kolejnych kratkach wygrywa. Jeśli nikomu się to nie uda, uznaje się remis.

    - Niech $n = 4$, a pierwszy gracz wpisał S w pierwszą kratkę. Pokaż, że drugi gracz może wygrać
    - Pokaż, że dla $n = 7$ pierwszy gracz może wygrać
    - Pokaż, że dla $n = 2000$, drugi gracz może wygrać
    - Kto wygrywa dla $n = 14$?
    - Jakie są pozycje wygrywające dla gry Nim w wersji misère?

11. **Turning Turtles.** Weźmy rządek monet obróconych orłem bądź reszką na wierzch. Ruch polega na obowiązkowym przewróceniu wybranej monety z orła na reszkę i, zależnie od woli gracza, obróceniu innej wybranej monety (zarówno z orła na reszkę, jak i z reszki w orła).

    - Wykazać, że jest to w istocie gra Nim, interpretując orła na n-tej pozycji jako stosik n kamieni
    - Pokazawszy podpunkt wyżej, znaleźć strategię wygrywającą

12. **Nim Moore'a.** Moore zaproponował swoją generalizację gry Nim, czyli Nim_k. Danych jest n stosików kamieni, gra zaś toczy się jak w zwykłym Nimie z tą różnicą, że gracz może usunąć dowolną dodatnią liczbę kamieni z k stosików, gdzie k jest ustalone. Co za tym idzie, "zwykły Nim" to Nim_1. Twierdzenie Moore'a mówi, że pozycja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest przegrywająca wtedy i tylko wtedy, gdy nim-suma dodająca bity mod $k + 1$ zamiast mod 2 jest zerem. Udowodnij je.

13. **Nim dwuwymiarowy.** Gra w Nim dwuwymiarowy rozgrywa się na ćwierćpłaszczyźnie podzielonej na pola (jak szachownica). Znajduje się na niej skończona liczba monet. W każdym ruchu, gracz bierze jedną monetę i przesuwa ją na dowolne pole na lewo lub na dół (zauważ, że gdy wszystkie monety są na najniższym wierszu, mamy do czynienia z grą Nimble).

14. Załóżmy, że każdy z graczy może albo usunąć jeden lub dwa kamyki, albo usunąć jeden kamyk i podzielić pozostałe na dwa stosiki.

15. Załóżmy, że w każdej turze gracz wybiera jeden stosik i usuwa z niego liczbę kamyków dającą resztę jeden przy dzieleniu przez trzy. Jeśli zechce, może do tego podzielić pozostałe kamyki na dwa stosiki.

16. **Rims.** Pozycją w grze Rims jest skończony zbiór punktów na płaszczyźnie, poprzedzielanych rozłącznymi okręgami. W każdej turze gracz rysuje okrąg przechodzący przez dodatnią liczbę punktów, tak, aby nie dotykał on innych okręgów. Ostatni wykonujący ruch wygrywa. Pokazać, że jest to Nim.

Zadania olimpijskie

1. (OM 66, 1.12) Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremnego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka v dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek v. Rozstrzygnąć, który z graczy - rozpoczynający grę czy jego przeciwnik - ma strategię wygrywającą.

2. (XIV Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich) Na stole znajdują się 2003 ciastka. Dwóch graczy wykonuje ruchy jeden po drugim. Ruch polega na zjedzeniu jednego ciastka lub połowy ciastek znajdujących się na stole (części całkowitej połowy wszystkich ciastek, jeśli jest ich nieparzysta liczba); co najmniej jedno ciastko musi zostać zjedzone w każdym ruchu. Przegrywa ten, kto zje ostatnie ciastko. Dla którego gracza - pierwszego czy drugiego - istnieje strategia wygrywająca?

3. (OM 64, 1.4) Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

4. (OM 60, 1.9) Dana jest tablica 2008x2008. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadzi do powstania ciągu pięciu kolejnych czarnych pionków w lini poziomej, pionowej lub ukośnej.

5. (Obóz Naukowy OM 2006, 59.) Marek i Jurek grają w następującą grę. Na początku na tablicy napisana jest liczba całkowita dodatnia n. W jednym ruchu gracz odejmuje od napisanej w danym momencie na tablicy liczby jej dzielnik będący jedynką, liczbą pierwszą lub iloczynem dwóch (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych i wynikiem odejmowania zastępuje wcześniejszą liczbę. Pierwszy ruch wykonuje Marek, a następnie gracze wykonują ruchy na przemian. Wygrywa gracz, który na tablicy napisze liczbę zero. Rozstrzygnąć, dla których liczb n Marek może zapewnić sobie wygraną, niezależnie od ruchów Jurka.

6. (Obóz Naukowy OM 2012, 7.) Dla dowolnych liczb całkowitych $m \geqslant n \geqslant 2$ rozpatrujemy następującą grę. Na początku dane są dwa stosy zawierające odpowiednio m i n kamieni. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy polegające na zabraniu z jednego stosu dodatniej liczby kamieni, która jest wielokrotnością liczby kamieni znajdujących się na drugim stosie. Wygrywa ten z graczy, któremu uda się opróżnić jeden ze stosów. Rozstrzygnąć, w zależności od m i n, który z graczy - rozpoczynający grę czy jego przeciwnik - ma strategię wygrywającą.

7. (Obóz Naukowy OM 2015, 24.) Na przyjęciu urodzinowym u Bogny jubilatka gra z gośćmi w następującą grę. Na początku na stole leży $n^2 + 2015$ ciastek, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 2015. Następnie naprzemiennie Bogna i jeden z gości zjadają pewną liczbę ciastek. Liczba ciastek zjedzonych w jednym ruchu musi wynosić 1, być liczba pierwszą mniejszą niż n, lub być wielokrotnością n. Wygrywa gracz, który zje ostatnie ciastko. Rozstrzygnąć, czy Bogna ma strategię wygrywającą.

Materiały przygotował Kamil Szubiński