Zadania

O ile polecenie nie brzmi inaczej, zbadać strategię wygrywającą (np. podaj funkcję Sprague-Grundy'ego)

1. Podaj strategię wygrywającą dla gry w zabieranie ze zbiorem $S = \{1, 2, 4, 8 \ldots\}$ (potęgi dwójki)

2. Dane są dwa niepuste pudłka, które początkowo zawierają odpowiednio n i m kamieni. Dwóch graczy wykonuje ruch opróżniając jedno pudełko i dzieląc zawartość drugiego w dowolny sposób tak, aby żadne nie było puste. Jest dokładnie jedna pozycja końcowa: $(1, 1)$. Czy istnieje strategia wygrywająca dla gry?
   Wskazówka: Rozpisz pozycje w tabeli dwuwymiarowej

3. Znajdź wszystkie pozycje wygrywające dla gry nim z czterema stosikami o 13, 17, 19 i 23 kamykach Jakie są pozycje wygrywające dla tych gier w wersji misère?

4. Znajdź funkcję Sprague-Grundy'ego gry w zabieranie ze zbiore $S = \{1, 3, 4\}$

5. Rozważmy grę, w której możesz zabrać c kamyków z stosiku liczącego ich n pod warunkiem, że c jest dzielnikiem n. Jest tylko jedna pozycja końcowa, czyli zero.

6. Załóżmy, że w powyższej grze nie wolno zabrać całego stosiku. Wtedy istnieje tylko jedna pozycja końcowa, jedynka.

7. Rozważ grę w której jest kilka stosików, gracze zaś mogą albo usunąć dowolną parzystą liczbę kamyków z dowolnego stosiku, albo usunąć dowolny stosik wysokości jeden. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu.

8. Rozważyć grę, w której gracz usuwa ze stosiku albo dowolną liczbę kamyków podzielną przez trzy (przy założeniu, że nie jest to cały stosik) albo cały stosik, przy założeniu że liczba kamyków daje resztę dwa z dzielenia przez trzy.

9. Dwaj gracze rysują kolejno przekątne 12-kąta foremnego, które się nie przecinają. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.

10. Na stole leży 9 żetonów z numerami od 1 do 9. Dwóch zawodników gra w następującą grę: pierwszy gracz w swoim ruchu usuwa ze stołu żeton z wybraną liczbą oraz wszystkie żetony z jej dzielnikami, następnie drugi wykonuje ruch wedle tych samych zasad, itd. Wygrywa zawodnik, który zdejmie ze stołu ostatni żeton. Który z graczy ma strategię wygrywającą i na czym może ona polegać?

11. **Chomp!** W tej grze ruch polega na zabieraniu kwadracików z prostokątnej planszy. Dokładniej, gracz wybiera kwadracik, a następnie zabiera go oraz wszstkie kwadraciki powyżej oraz na prawo od niego. Gracz który zabrał kwadracik $(1, 1)$ (lewy dolny róg) przegrywa. Dowiedziono, że o ile zaczynamy od prostokątnego układu kwadracików (tj. nie ma wcięć czy też ubytków) gracz zaczynający ma strategię wygrywającą. Dowodzi się tego jednak w sposób niekonstruktywny, tj. bez podania tej strategii. Spróbuj dowieść tę tezę.

12. Dany jest stosik kamyków. Pierwszy gracz może zabrać tyle kamyków ile chce, pod warunkiem, że zostawi conajmniej jeden. W kolejnych turach, dany gracz nie może wziąć więcej kamyków niż przeciwnik w poprzedniej turze. Przegrywa gracz niemogący wykonać ruchu.

13. **Nim Fibonacci** Zasady podobne do tych w poprzedniej grze, z tym że gracz może wziąć co najwyżej dwa razy tyle kamyków ile przeciwnik w poprzedniej turze. Analiza gry jest nieco trudniejsza i opiera się na liczbach Fibonacciego, w szczególności zaś na lemacie Zeckendorfa (każda dodatnia liczba całkowita może być jednoznacznie zapisana jako suma różnych, niesąsiednich liczb z ciągu Fibonacciego)

14. Gra SOS (28. Annual USA Mathematical Olympiad, 1999). Gra rozgrywana jest na pasku o n kratkach. Każdy z graczy pisze w pustą kratkę literkę S albo O. Ten, kto pierwszy osiągnie słowo SOS w kolejnych kratkach wygrywa. Jeśli nikomu się to nie uda, uznaje się remis.

    - Niech $n = 4$, a pierwszy gracz wpisał S w pierwszą kratkę. Pokaż, że drugi gracz może wygrać
    - Pokaż, że dla $n = 7$ pierwszy gracz może wygrać
    - Pokaż, że dla $n = 2000$, drugi gracz może wygrać
    - Kto wygrywa dla $n = 14$?
    - Jakie są pozycje wygrywające dla gry Nim w wersji misère?

15. **Turning Turtles.** Weźmy rządek monet obróconych orłem bądź reszką na wierzch. Ruch polega na obowiązkowym przewróceniu wybranej monety z orła na reszkę i, zależnie od woli gracza, obróceniu innej wybranej monety (zarówno z orła na reszkę, jak i z reszki w orła).
    - Wykazać, że jest to w istocie gra Nim, interpretując orła na n-tej pozycji jako stosik n kamieni
    - Pokazawszy podpunkt wyżej, znaleźć strategię wygrywającą

16. **Nim Moore'a.** Moore zaproponował swoją generalizację gry Nim, czyli Nim_k. Danych jest n stosików kamieni, gra zaś toczy się jak w zwykłym Nimie z tą różnicą, że gracz może usunąć dowolną dodatnią liczbę kamieni z k stosików, gdzie k jest ustalone. Co za tym idzie, "zwykły Nim" to Nim_1. Twierdzenie Moore'a mówi, że pozycja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest przegrywająca wtedy i tylko wtedy, gdy nim-suma dodająca bity mod $k+1$ zamiast mod 2 jest zerem. Udowodnij je.

    O ile polecenie nie brzmi inaczej, zbadać strategię wygrywającą (np. podaj funkcję Sprague-Grundy'ego)

17. **Nim dwuwymiarowy.** Gra w Nim dwuwymiarowy rozgrywa się na ćwierćpłaszczyźnie podzielonej na pola (jak szachownica). Znajduje się na niej skończona liczba monet. W każdym ruchu, gracz bierze jedną monetę i przesuwa ją na dowolne pole na lewo lub na dół (zauważ, że gdy wszystkie monety są na najniższym wierszu, mamy do czynienia z grą Nimble).

18. Załóżmy, że każdy z graczy może albo usunąć jeden lub dwa kamyki, albo usunąć jeden kamyk i podzielić pozostałe na dwa stosiki.

19. Załóżmy, że w każdej turze gracz wybiera jeden stosik i usuwa z niego liczbę kamyków dającą resztę jeden przy dzieleniu przez trzy. Jeśli zechce, może do tego podzielić pozostałe kamyki na dwa stosiki.

20. **Rims.** Pozycją w grze Rims jest skończony zbiór punktów na płaszczyźnie, poprzedzielanych rozłącznymi okręgami. W każdej turze gracz rysuje okrąg przechodzący przez dodatnią liczbę punktów, tak, aby nie dotykał on innych okręgów. Ostatni wykonujący ruch wygrywa. Pokazać, że jest to Nim.

21. (OM 60) Dana jest tablica 2008x2008. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadzi do powstania ciągu pięciu kolejnych czarnych pionków w lini poziomej, pionowej lub ukośnej.

Materiały przygotował Kamil Szubiński