

Lista zadań

Zadanie 1. (i) Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne $f(xy) = f(x) + f(y)$.

(ii) Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne $f(xy) = f(x) + f(y)$.

(iii) Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y) + f(z) = f(x) + f(y+z).$$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, spełniające warunki:

(i) $f(1) = 2$,

(ii) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie ciągłe funkcje $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, takie że dla dowolnych $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ wartość $f(x_1y) - f(x_2y)$ nie zależy od wyboru $y \in (0, +\infty)$.

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające układ równań funkcyjnych $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

Zadanie 7. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$xf(x+y) - 2f(x-y) = f(x)(xe^y - 2e^{-y}).$$

Zadanie 8. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$2f(x+2y) + f(x) = f(x+y)(2e^y + e^{-y}).$$

Zadanie 9. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie funkcje $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$f(x) \ln(1 - e^x) - 2xf(\ln(1 - e^x)) = 1.$$

Zadanie 11. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$2f(x) + f(1-x) = 3 - xf(1).$$

Zadanie 12. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie funkcyjne

$$(x-2)f(x) + f\left(-\frac{2}{x}\right) - xf(2) = 5.$$