Wzór Stirlinga

Wzór Stirlinga mówi, że

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{1}$$

Znaczek $\sim$ należy tu czytać jako stwierdzenie, że iloraz obu stron dąży do 1 gdy $n \to \infty$.

Kluczem do wzoru Stirlinga jest rozważanie pola pod wykresem logarytmu naturalnego.

1. Przypomnij sobie podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego:

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

(dla ciągłej funkcji f). Napisz iloraz różnicowy służący do policzenia lewej strony; pomyśl jaki jest jego sens geometryczny (w terminach wykresu funkcji f).

2. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że jeśli $F'(x) = f(x)$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Wsk. funkcja o zadanej pochodnej jest – z dokładnością do stałej addytywnej – jedyna.)

3. Zauważ, że $(x \ln x - x)' = \ln x$. (Łatwo sprawdzić, trudniej zgadnąć; jak umiesz całkować przez części to będziesz mieć więcej satysfakcji całkując logarytm.)

4. Pole pod wykresem logarytmu nad przedziałem $[1, n]$ wynosi $n \ln n - n + 1$.

To była dokładna wartość; teraz będziemy to pole coraz lepiej przybliżać dostając coraz dokładniejsze wersje wzoru Stirlinga.

---

5. Rozważ przybliżenie prostokątami szerokości 1 o wysokościach $\ln 2, \ln 3, \dots, \ln n$. Te prostokąty pokrywają cały obszar pod wykresem, i jeszcze wystają troche ponad wykres. Jeśli wystające kawałki dosunąć poziomo do osi OY, to łatwo zobaczyć, że ich łączne pole jest mniejsze niż $\ln n$; jest ono nawet mniejsze niż $\frac{1}{2}\ln n$ (bo logarytm jest funkcją wklęsłą). Dostajemy więc:

$$n \ln n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \ln k < n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n. \tag{2}$$

Środkowa suma to oczywiście logarytm $n!$. Po wzięciu eksponensów (czyli podniesieniu e do potęg, których wykładnikami są trzy strony nierówności) nierówność (2) daje więc obustronne szacowania na $n!$. Napisz te szacowania i porównaj z wyrażeniem ze wzoru Stirlinga.

---

6. Teraz będziemy przybliżać obszar pod wykresem trapezami. Trapez numer k będzie miał podstawy na prostych $x = k$ i $x = k + 1$, dwa wierzchołki na osi OX, a pozostałe dwa na wykresie logarytmu. Między tym trapezem a wykresem pozostaje niewielki obszar T_k (można by powiedzieć: wycinek wykresu logarytmu).

   a) Suma pól pierwszych $n - 1$ trapezów jest równa

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - \frac{1}{2}\ln n$$

   i różni się od pola pod wykresem o sumę pól wycinków $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$.

   b) Przesuń wszystkie wycinki T_k tak, by ich prawe narożniki znalazły się w punkcie $(2, \ln 2)$. Uzasadnij, że tak przesunięte wycinki będą miały rozłączne wnętrza i wszystkie znajdą się w trójkącie o polu $\frac{1}{2}\ln 2$. (Wsk. porównaj nachylenie stycznej do wykresu logarytmu w punkcie $(k, \ln k)$ z nachyleniem cięciwy wykresu będącej dolnym bokiem wycinka T_k.)

c) Uzasadnij, że

$$n \ln n - n + 1 - \frac{1}{2}\ln 2 < \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 \tag{3}$$

i wyprowadź stąd nieco dokładniejszą niż poprzednio wersję wzoru Stirlinga. (Do wzoru (1) wciąż będzie troche brakować.)

---

7. Przeanalizujemy teraz jeszcze dokładniej sytuację z poprzedniego zadania (w szczególności oznaczenia będą te same). Niech A oznacza sumę pól wszystkich wycinków T_k (jest ona skończona, bo nie przekracza $\frac{1}{2}\ln 2$), zaś A_n sumę pól wycinków o numerach $\geq n$.
   a) Uzasadnij, że $A_n < \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n})$. Wywnioskuj stąd, że $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$.
   b) Zauważ, że

$$\ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n = n\ln n - n + 1 - A + A_n. \tag{4}$$

   Wywnioskuj stąd, że dla pewnej stałej C zachodzi

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{5}$$

   c) Jakie szacowania stałej C potrafisz podać w tej chwili?

Pozostaje wyliczyć stałą C występującą we wzorze (5).

8. Naucz się całkować przez części: Znasz zapewne regułę Leibniza: $(fg)' = f'g + fg'$. Całkując dostajemy $fg = \int f'g + \int fg'$. Pisząc nieco dokładniej:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{6}$$

Wzór (6) stosujemy zwykle tak: rozpoznajemy, że wyrażenie podcałkowe jest iloczynem funkcji, która ewidentnie jest pochodną czegoś, i jakiejś drugiej funkcji. Przerzucamy wtedy pochodną na drugi składnik iloczynu (no i dopisujemy z przodu minus, i dodajemy jeszcze dodatkowy skladnik, w którym na szczęście nie ma już żadnych całek do policzenia). Mamy nadzieję dostać w ten sposób łatwiejszą całkę; udaje się to rzadko, ale próbować trzeba. Czasem jest bardzo ciekawie: dostajemy z grubsza tę samą całkę, ale wcale nie tautologicznie – dodatkowy składnik wzoru (6) coś o niej mówi. Są to owe mistyczne rachunki, w których przelewanie z pustego w próżne prowadzi do zadziwiających wzorów. My zrobimy coś nieco mniej ambitnego.

9. Niech $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.
   a) Policz I_0 oraz I_1.
   b) Scałkuj przez części (ewidentna pochodna to niestety tylko sinus). Dostań wzór $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ (pamiętaj na jedynkę trygonometryczną), a stąd $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
   c) Uzasadnij, że

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

   Napisz analogoczny wzór na I_{2n+1}.
   d) Zauważ, że $I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$. Wywnioskuj

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n}{2n-1} < \frac{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2}{3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2\cdot(2n+1)} < \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

   e) Z (7) wywnioskuj tzw. wzór Wallisa:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{2n+1}}. \tag{8}$$

   Pozbądź się silni w tym wzorze używając (5) i w ten sposób wylicz C.