I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 7 - 11 grudnia 2016

Nierówności 2

Grzegorz Ciesielski

1. Udowodnij, że jeżeli $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ i $a+b+c=1$, to :

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$$

2. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$ oraz liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots a_n$, których suma równa się 1.

   (a) Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots x_n$ o sumie równej 1 zachodzi nierówność:

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$$

   (b) Wyznaczyć wszystkie układy liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots x_n$ o sumie równej 1, dla których powyższa nierówność staje się równością.

3. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots a_n$ spełniają warunki:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n+1 \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n+3 \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = n+7$$

   Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \geq n+15$$

4. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 1$ wyznaczyć maksymalną wartość sumy liczb naturalnych $k_1, k_2, \ldots k_n$ spełniających warunek:

$$k_1^3+k_2^3+\cdots+k_n^3 \leq 7n$$

5. Dla danej liczby $n \geq 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia :

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\cdots+\frac{x_n^n}{n}$$

   gdzie $x_1, x_2, \ldots x_n$ są liczbami dodatnimi spełniającymi warunek:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=n$$

6. Niech x, y, z będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $xyz \geq 1$. Udowodnij, że:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0$$

7. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

8. Liczby dodatnie $x_1, x_2, \dots x_n$ spełniają warunek:

$$\sum_{i=1} nx_i \leq \sum_{i=1} nx_i^2$$

Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej t większej od 1 zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1} nx_i^t \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{t+1}$$

9. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \dots a_n$, gdzie $n \geq 2$ spełniają warunek:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^{n-1}a_1$$

Udowodnij, że:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}} \geq n-1$$

10. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$$

Udowodnij, że:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d)-4$$

11. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 + x_3^3 \cdots + x_n^n = n \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

W liczbach nieujemnych $x_1, x_2, \dots x_n$.

12. Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Udowodnij, że:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leq 1$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z takich, że $xyz = 1$, zachodzi nierówność:

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$