I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 7 - 11 grudnia 2016

Nierówności 1

Grzegorz Ciesielski

1. Pokaż, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi nierówność: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
3. Pokaż, że $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq (a + b + c)^2$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:
$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$
.
5. Pokaż, że jeśli $a, b, c > 0$ to:
$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc$$
6. Pokaż, że jeśli $p > 0, q > 0, pq = 1$, to
$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \geq 4$$
7. Pokaż, że jeśli $a, b, c > 0$ oraz $a + b + c = 1$, to $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.
8. Pokaż, że dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

$8\frac{1}{2}$. Pokaż, że dla dowolnych $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$ zachodzi nierówność:
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

9. Pokaż, że dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi nierówność: $a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} \geq a + b$.
10. Pokaż, że dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

$10\frac{1}{2}$. Udowodnij, że jeżeli $a, b, c, d > 0$, to:
$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}$$

11. Pokaż, że dla $a, b > 0$ zachodzą nierówności:
$$\max\{a, b\} \geq \frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} \geq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2} \geq \min\{a, b\}$$

Ogólnie: Pokaż, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $n, k, i \in \mathbb{Z}$ takich, że $n > k$ oraz $0 \leq i \leq k$ zachodzi nierówność:

$$(a^n + b^n)(a^{k-i} + b^{k-i}) \geq (a^k + b^k)(a^{n-i} + b^{n-i})$$

Co jest równoważne nierówności w łatwiejszej do zapamiętania postaci, o ile a i b nie są zerami:

$$\frac{a^n + b^n}{a^k + b^k} \geq \frac{a^{n-i} + b^{n-i}}{a^{k-i} + b^{k-i}}$$

***** Czy można to jeszcze bardziej uogólnić?

12. Pokaż, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}$$

13. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$. Pokaż, że:

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1$$

14. Pokaż, że jeżeli $a + b = 1$, to $a^5 + b^5 \geq \frac{1}{16}$.

15. Udowodnij, że jeżeli $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ oraz $a_i > 0$ dla każdego i, to:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq n^2$$

Kiedy zachodzi równość?

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

Def.: Niech $x_1, x_2, \ldots x_n > 0$. Oznaczamy:

$$A\Big(x_1, x_2, \ldots x_n\Big) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$G\Big(x_1, x_2, \ldots x_n\Big) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

16. Pokaż, że jeśli $a, b > 0$, to $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

17. Pokaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x_i > 0$ dla każdego i, to:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \longrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}$$

18. Pokaż, że jeśli $x_i > 0$ dla $i \in \mathbb{Z}_+$, $i \leq n$, to:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \longrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$$

19. Udowodnij (indukcyjnie), że jeżeli $a_1, a_2, \ldots a_n \geq 0$ i $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$, to $a_1 a_2 \ldots a_n \leq 1$

20. Wywnioskuj: (a) z zadań 16-18, (b) z zadania 19, że:

$$A\Big(x_1, x_2, \ldots x_n\Big) \geq G\Big(x_1, x_2, \ldots x_n\Big)$$

21. Pokaż, że jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to $\sqrt[n]{n} \leq \frac{n+2\sqrt{n}-2}{n}$.

22. Pokaż, że jeżeli $n > k$ oraz $x \geq 0$, to

$$\frac{x^n - 1}{n} \geq \frac{x^k - 1}{k}$$

23. Udowodnij, że 1 jest jedynym dodatnim miejscem zerowym wielomianu $W(x) = x^n - nx + n - 1$.

24. Pokaż, że jeżeli $n \geq 2$ oraz $x_1, x_2, \dots x_n \geq 0$, to:
$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i$$

Nierówność Jensena

Def.: Funkcję $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą* (na $[a, b]$), jeżeli dla wszystkich $x, y \in [a, b]$ i każdego $t \in [0, 1]$ zachodzi nierówność:
$$f(tx + (1-t)y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$$
Gdy nierówność zachodzi w drugą stronę mówimy, że funkcja f jest *wklęsła*.

Tw.: (Nierówność Jensena) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Jeżeli $x_1, x_2, \dots x_n \in [a, b]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in [0, 1]$ oraz $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, to
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$
Jeżeli f jest wklęsła, nierówność zachodzi w drugą stronę.

25. Udowodnij nierówność Jensena.

26. Pokaż, że $f(x) = x^\alpha$ jest wypukła na $[0, \infty)$ jeśli $\alpha > 1$, i wklęsła jeśli $0 < \alpha < 1$.

27. Pokaż, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 1$, to:
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

28. Niech α, β, γ będą kątami w trójkącie. Pokaż, że:
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

29. Niech α, β, γ będą kątami w trójkącie ostrokątnym. Pokaż, że:
$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$$

30. Pokaż, że jeżeli $x, y, z \geq 0$ i $x + y + z = 1$, to
$$\frac{3x+1}{x+1} + \frac{3y+1}{y+1} + \frac{3z+1}{z+1} \leq \frac{9}{2}$$

Nierówność między średnimi potęgowymi

Def.: Niech $x_1, x_2, \dots x_n > 0$. Oznaczamy
$$\begin{aligned}
\mu_p(x_1, x_2, \dots x_n) &= \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}}, \ p \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
\mu_0(x_1, x_2, \dots x_n) &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \\
\mu_{-\infty}(x_1, x_2, \dots x_n) &= \min(x_1, x_2, \dots x_n) \\
\mu_{+\infty}(x_1, x_2, \dots x_n) &= \max(x_1, x_2, \dots x_n)
\end{aligned}$$

31. Pokaż, że $\lim\limits_{p\to\infty} \mu_p = \mu_\infty$ i analogicznie $\lim\limits_{p\to-\infty} \mu_p = \mu_{-\infty}$

32. Pokaż, że jeśli $p > 0$, to $\mu_{+\infty}(x_1, x_2, \dots x_n) \geq \mu_p(x_1, x_2, \dots x_n) \geq \mu_0(x_1, x_2, \dots x_n)$.

33. Pokaż, że jeśli $p < 0$, to $\mu_{-\infty}(x_1, x_2, \dots x_n) \leq \mu_p(x_1, x_2, \dots x_n) \leq \mu_0(x_1, x_2, \dots x_n)$.

34. Pokaż, że jeśli $p > q$, to $\mu_p(x_1, x_2, \dots x_n) \geq \mu_q(x_1, x_2, \dots x_n)$.