Bardo, 7 – 11 XII A. D. 2016

I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

GEOMETRIA ELEMENTARNA

materiały przygotował Antoni Kamiński na podstawie zbiorów zadań:
„Przygotowanie do olimpiad matematycznych" D. Musztariego oraz „Wykaż, że…" S. Mizi

Zastosowanie twierdzenia Ptolemeusza

1. (tw. Ptolemeusza) Wykaż, że w czworokącie wpisanym w okrąg suma iloczynów długości przeciwległych boków jest równa iloczynowi długości przekątnych.
2. Niech X – dowolny punkt na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Wykaż, że największy z odcinków XA, XB, XC jest równy sumie dwóch pozostałych.
3. Trójkąt ABC wpisano w okrąg. Oznaczmy przez m, n, k odległości pewnego punktu X leżącego na okręgu od boków BC, AC, AB. Wykaż, że $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{k}$ gdzie a, b, c – długości boków BC, AC, AB.
4. Długości boków trójkąta ABC tworzą ciąg arytmetyczny ($b > a > c$). Wykaż, że jeśli na trójkącie opisać okrąg i przedłużyć dwusieczną AI do przecięcia z okręgiem w punkcie W, to $AI = IW$, gdzie I – środek okręgu wpisanego.
5. Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okrągu opisanego od boków trójkąta równa jest sumie promieni okręgów opisanego i wpisanego.
6. Dowolny okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta odcina na jego ramionach odcinki o długościach m i n, a na dwusiecznej o długości l. Wykaż, że stosunek $\frac{m+n}{l}$ nie zależy od położenia okręgu ani jego promienia.
7. Niech $ABCDEFG$ – siedmiokąt foremny. Wykaż, że $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.
8. W trójkąt ABC wpisano półkole tak, że średnica półkola zawiera się w boku BC. F_1, F_2 – punkty styczności z ramionami trójkąta. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie W. Dowieść, że pole trójkąta wynosi $S = \frac{1}{2} F_1F_2 \cdot AW$.
9. Na przeciwprostokątnej zbudowano kwadrat na zewnątrz. Wyznacz odległość wierzchołka kąta prostego od środka symetrii kwadratu, wiedząc, że suma przyprostokątnych – m.
10. W trójkącie ABC punkty A, M_2, M_3, L_1 leżą na jednym okręgu. Wykaż, że $\sqrt{2} = \frac{b+c}{a}$, gdzie M_2 i M_3 to odpowiednio środki boków AC i AC, L_1 – punkt przecięcia się dwusiecznej kąta BAC z BC.
11. Proste wyznaczone przez dwusieczne kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach L_1, L_2 i L_3. Udowodnij, że $AW_1 + BW_2 + CW_3 > AB + BC + AC$.

Uwaga. Twierdzenie Ptolemeusza jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia:

W dowolnym czworokącie wypukłym suma iloczynów długości przeciwległych boków jest większa lub równa iloczynowi przekątnych. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie można opisać okrąg.

Styczne i sieczne

12. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu $\mathcal{O}$. Udowodnij następujące stwierdzenia:
    (a) Niech M będzie punktem przecięcia przedłużeń odcinków AC i BD; wówczas $AM \cdot MC = BM \cdot MD$.
    (b) Niech M będzie punktem przecięcia przedłużeń odcinków AB i CD za punkty A i D; wówczas $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, co znaczy, że ten iloczyn zależy jedynie od wyboru M.
    (c) Odwrotnie, jeśli zachodzi równość (a) albo równość (b) to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.
    (d) (*potęga punktu*) Kwadrat długości odcinka stycznej do okręgu poprowadzonej z punktu M jest równy iloczynowi $AM \cdot MB$.
13. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu $\mathcal{O}$. Wykaż, że $AB + CD = BC + DA$.
14. Udowodnij, że jeśli $AB + CD = BC + DA$, to czworokąt $ABCD$ jest opisany na pewnym okręgu.
15. Proste PA i PB są styczne do okręgu o środku w punkcie O (A i B są punktami styczności). Przeprowadzamy trzecią styczną do tego okręgu przecinającą odcinki PA i PB w punktach X i Y. Wykaż, że wielkość kąta XOY nie zależy od wyboru trzeciej stycznej.
16. Dwa nie przecinające się okręgi są wpisane w kąt.
    (a) Przeprowadzona została wspólna styczna do obu okręgów we wnętrzu kąta. Punkty przecięcia tej stycznej z ramionami kąta oznaczamy przez A_1 i A_2, a punkty styczności przez B_1 i B_2. Wykaż, że $A_1B_1 = A_2B_2$.
    (b) Przez punkty styczności okręgów z ramionami kąta, leżące na równych ramionach tego kąta i na różnych okręgach, przeprowadzono prostą. Wykaż, że ta prosta wycina na okręgach cięciwy równej długości.
17. Przez punkt P, leżący na wspólnej cięciwie AB dwóch przecinających się okręgów przeprowadzono cięciwę KM pierwszego okręgu i cięciwę NT drugiego. Wykaż, że $KNMT$ jest czworokątem wpisanym w pewien okrąg.
18. Dany jest okrąg $\mathcal{O}$ i punkty P, K w jego wnętrzu. Przez punkt P przeprowadzamy sieczną APB (A i B to punkty na okręgu $\mathcal{O}$) i konstruujemy okrąg przechodzący przez punkty A, B, K. Wykaż, że wszystkie takie okręgi mają, oprócz K, jeszcze jeden punkt wspólny, niezależny od wyboru cięciwy APB.

19. Pokaż, że sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości naprzeciwległych krawędzi czworościanu są równe.
20. (a) Wykaż, że dla czworościanu foremnego $ABCD$ istnieje pięć sfer stycznych do wszystkich jego krawędzi lub do ich przedłużeń (jedna sfera jest styczna do wszystkich krawędzi AB, BC, AC, AD, BD, CD, druga sfera jest styczna do krawędzi AB, BC, AD i do przedłużeń krawędzi AD, BD, CD poza punkty A, B, C, itd.).
(b) Odwrotnie, jeśli istnieje pięć sfer stycznych do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$ lub do ich przedłużeń, to czworościan $ABCD$ jest foremny.
21. Przeprowadź przez punkty A i B, leżące po jednej stronie prostej ℓ, okrąg styczny do tej prostej.

Kąty oparte na łukach

22. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu $\mathcal{O}$ o środku O, we wskazanym porządku.
    (a) Udowodnij, że $2\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC$ (miara kąta wpisanego w okrąg jest dwa razy większa od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku). Wywnioskuj stąd, że wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.
    (b) Niech M będzie punktem przecięcia prostych AB i CD, przy czym M leży na zewnątrz okręgu $\mathcal{O}$, punkt A znajduje się na pierwszej prostej pomiędzy punktami M i B, a punkt D leży na drugiej prostej pomiędzy punktami M i C. Udowodnij, że $2\sphericalangle AMD = \sphericalangle BOC - \sphericalangle AOD$.
    (c) Niech N będzie punktem przecięcia odcinków AC i BD. Udowodnij, że $2\sphericalangle APB = \sphericalangle AOB + \sphericalangle COD$.
    (d) $ABCD$ jest czworokątem wpisanym w okrąg $\mathcal{O}$. Wykaż, że suma kątów przeciwległych tego czworokąta jest równa $180°$.
    (e) Udowodnij, że jeżeli suma kątów przeciwległych czworokąta jest równa $180°$, to czworokąt ten można wpisać w pewien okrąg.
23. Dwa okręgi przecinają się w punktach K i M. Prowadzimy dwie proste AB i CD, przechodzące odpowiednio przez punkty K i M, i przecinające pierwszy okrąg w punktach A i C, a drugi okrąg odpowiednio w punktach B i D. Udowodnij, że odcinki AC i BD są równoległe.
24. Wierzchołek A trójkąta ostrokątnego ABC połączono odcinkiem ze środkiem O okręgu opisanego na tym trójkącie, zaś odcinek AH jest wysokością trójkąta poprowadzoną z punktu A. Wykaż, że $\sphericalangle BAH = \sphericalangle OAC$.
25. Punkty A, B, C i D leżą na pewnym okręgu we wskazanym porządku. Środki łuków AB, BC, CD i DA oznaczamy odpowiednio A_1, B_1, C_1 i D_1. Udowodnij, że proste A_1C_1 i B_1D_1 są prostopadłe.
26. Dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta O_1A przecina okrąg $\mathcal{O}_2$ w punkcie C. Udowodnij, że punkty O_1, O_2, B i C leżą na pewnym okręgu.

27. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a jego przekątna AC jest zawarta w dwusiecznej kąta DAB. Udowodnij, że $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.
28. Kwadrat $ABCD$ i okrąg $\mathcal{O}$ przecinają się w ośmiu punktach, tworząc cztery trójkąty krzywoliniowe: AEF, BGH, CJK i DLM (EF, GH, JK i LM są łukami okręgu). Udowodnij, że:
   (a) suma długości łuków EF i JK jest równa sumie długości łuków GH i LM.
   (b) suma obwodów trójkątów krzywoliniowych AEF i CJK jest równa sumie obwodów trójkątów krzywoliniowych BGH i DLM.
29. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku A ma $60°$. Udowodnij, że dwusieczna jednego z kątów, powstałych w wyniku przecięcia się wysokości poprowadzonych z punktów B i C, przechodzi przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

Miejsce geometryczne

30. Znajdź zbiór punktów równooddalonych:
   (a) od ramion kąta
   (b) od danych dwóch punktów.
31. Znajdź zbiór punktów, dla których stosunek odległości od ustalonych dwóch punktów A i B jest stały i równy x.
32. Dane są dwa okręgi, z których każdy leży na zewnątrz drugiego. Znajdź *linię (oś) potęgową* tych okręgów, tj. zbiór takich punktów M, dla których styczne poprowadzone z punktu M do obu okręgów mają równe odcinki MA i MB, gdzie A i B są odpowiednimi punktami styczności.
33. Niech T będzie punktem na linii potęgowej ℓ dwóch leżących na zewnątrz siebie okręgów o środkach O_1 i O_2, a odcinki TE_1 i TE_2 niech będą odcinkami stycznych do okręgów $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ z punktami styczności E_1 i E_2 leżącymi po różnych stronach odcinka O_1O_2. Wykaż, że punkt P przecięcia odcinków O_1O_2 i E_1E_2 nie zależy od wyboru T.
34. Znajdź zbiór punktów M, dla których różnica kwadratów odległości od M do ustalonych punktów A i B jest równa zadanej liczbie.
35. Dany jest kwadrat o boku 1. Znajdź zbiór wszystkich punktów M, dla których suma odległości od M do boków kwadratu lub do ich przedłużeń jest równa 4.
36. Znajdź zbiór wszystkich wierzchołków D prostokątów $ABCD$, w których wierzchołki A i C leżą na ustalonym okręgu, a ustalony punkt B leży wewnątrz tego okręgu.
37. Środek ciężkości trójkąta leży w punkcie przecięcia środkowych, przy czym środkową jest odcinek łącząc wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. Znajdź zbiór środków ciężkości wszystkich trójkątów ABC wpisanych w dany okrąg.

38. Dany jest odcinek AB. Znajdź zbiór wierzchołków C trójkątów ostrokątnych ABC.

Szczególne punkty trójkąta

39. (a) Z tego, że istnieje koło opisane na trójkącie wywnioskuj, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

(b) Znajdź zbiór *ortocentrów* (punktów przecięcia wysokości) wszystkich trójkątów ABC wpisanych w okrąg o promieniu R i środku O.

40. Dany jest trójkąt ABC. Dwie proste, symetryczne do prostej AC odpowiednio względem prostych AB i BC, przecinają sięw punkcie K. Pokaż, że prosta BK przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.
41. Pokaż, że ortocentrum N, środek ciężkości S i środek okręgu opisanego O w trójkącie ABC leżą na jednej prostej.
42. Niech R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, a r promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wyraź przez R i r odległość d między środkami tych okręgów.

Pola figur płaskich

43. Wykaż, że pola trójkątów ABC i ABD (punkty C i D położone są po tej samej stronie prostej AB) są jednakowe wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki AB i CD są równoległe.
44. Niech $ABCDEF$ będzie takim sześciokątem wypukłym, że następujące pary odcinków: AB i CF, CD i BE oraz EF i AD są równoległe. Pokaż, że pola trójkątów ACE i BDF są równe.
45. Boki AB, BC i CA trójkąta ABC przedłużono poza punkty B, C, A o odcinki równe połowom tych boków: $BB_1 = \frac{1}{2}AB, CC_1 = \frac{1}{2}BC, AA_1 = \frac{1}{2}CA$. Obliczyć pole trójkąta $A_1B_1C_1$, jeśli wiadomo, że pole trójkąta ABC wynosi x.
46. Środkowymi (lub *liniami średnimi*) w czworokącie $ABCD$ nazywamy odcinki łączące środki przeciwległych boków. Pokaż, że:
    (a) czworokąt $ABCD$ jest trapezem wtedy i tylko wtedy, gdy jedna ze środkowych dzieli $ABCD$ na dwa czworokąty o równym polu
    (b) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy obie środkowe dzielą pole $ABCD$ na połowy.

47. Dane są dwa koncentryczne okręgi: O_1 o promieniu R i O_2 o promieniu r, przy czym $2r < R$. Na okręgu O_1 leżą punkty A, C_1, B, A_1, C i B_1 (w podanej kolejności) takie, że cięciwy AA_1, BB_1 i CC_1 są styczne do okręgu O_2 i wydzielają z koła O_1 trzy trójkąty krzywoliniowe A_1KB, B_1LC i C_1MA o polach S_1, S_2 i S_3 odpowiednio, a także trójkąt KLM o polu S opisany na okręgu O_2. Wykaż, że $S_1 + S_2 + S_3 - S$ nie zależy od wyboru punktów A, B i C.
48. Znajdź trójkąt o możliwie największym polu, którego boki o długościach a, b i c spełniają warunki: $a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$.
49. Znajdź maxymalne możliwe pole rzutu prostopadłego na płaszczyznę pudełka od zapałek o krawędziach a, b i c.
50. Środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się. Pokaż, że pola tych czworokątów są równe.
51. Rzuty prostopadłe pewnego wielokąta na oś OX, na dwusieczną pierwszej i trzeciej ćwiartki osi współrzędnych, na oś OY oraz na dwusieczną drugiej i czwartej ćwiartki osi współrzędnych mają odpowiednio długości: $4, 3\sqrt{2}, 5, 4\sqrt{2}$. Pokaż, że pole wielokąta nie przekracza 17,5.
52. Dany jest dowolny trójkąt ABC i punkt X w jego wnętrzu. Niech AM, BN i CK będą odcinkami łączącymi wierzchołki trójkąta ze środkami przeciwległych boków. Wykaż, że pole jednego z trójkątów XAM, XBN, XCK jest równe sumie pól pozostałych dwóch.
53. Niech a, b, c i d będą długościami kolejnych boków czworokąta, S jego polem. Wykaż, że:

    (a) $S \leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$ (b) $S \leq \frac{ab+cd}{2}$

54. Ze wszystkich rzutów prostopadłych czworościanu foremnego $ABCD$ na różne płaszczyzny wybierz rzut o największym polu.
55. Na bokach AB i BC trójkąta ABC, na zewnątrz trójkąta, zbudowano równoległoboki $ABDE$ i $BCFG$. Proste ED i FG przecinają się w punkcie M. Trzeci równoległobok $ACHJ$ dobudowano do boku AC, na zewnątrz trójkąta ABC, w taki sposób, że odcinki AJ, CH i BM są równe i równoległe. Udowodnij, że pole równoległoboku $ACHJ$ jest równe sumie pól równoległoboków $ABDE$ i $BCFG$.
56. W trójkącie ABC rozważamy trzy odcinki dwusiecznych kątów $\sphericalangle A, \sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ leżące wewnątrz trójkąta. Wykaż, że pole trójkąta jest większe niż $\frac{1}{\sqrt{3}}$, jeśli wszystkie te odcinki mają długość przekraczającą 1.

Metoda pól

57. (tw. o dwusiecznej kąta wewnętrznego) Wykaż, że dwusieczna kąta A w trójkącie ABC dzieli bok BC w stosunku $AB:AC$.

58. Wykaż, że suma odległości punktu M, położonego wewnątrz trójkąta równobocznego, od boków tego trójkąta jest stała.
59. W równoległoboku $OABC$ na bokach OA i OC zaznaczono punkty K i L w taki sposób, że $\frac{OK}{OA} = \frac{1}{3}, \frac{OL}{OC} = \frac{1}{4}$. Prosta KL przecina przekątną OB równoległoboku w punkcie E. Znajdź $\frac{OE}{OB}$.

Kilka ważnych twierdzeń

60. (tw. Menelaosa) W trójkącie ABC punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach BC, AC i na przedłużeniu boku AB. Wykaż, że jeśli K, L i M są współliniowe, to $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1$.
61. (tw. Cevy) W trójkącie ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, AC i AB. Wykaż, że jeśli $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$, to AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.
62. (własność trójliścia) W trójkącie ABC dwusieczna kąta A przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie W. Wykaż, że punkt I jest środkiem okręgu wpisanego (*incentrum*) wtedy i tylko wtedy, gdy $BW = CW = IW$.
63. (fakt 2.) Pokaż, że środkowa przeciwprostokątnej wydziela dwa trójkąty równoramienne.
64. (fakt 3.) Wykaż, że odległość wierzchołka od ortocentrum jest dwa razy dłuższa niż odległość środka okręgu opisanego od przeciwległego boku.
65. (fakt 4.) Wykaż, że trójkąt (zwany *spodkowym*), którego wierzchołkami są spodki wysokości pewnego trójkąta ostrokątnego, odcina trzy trójkąty podobne.
66. Oblicz pole trójkąta na cztery sposoby (wykorzystując: 1. długość boku i prostopadłej do niego wysokości, 2. długość obwodu i promienia okręgu wpisanego, 3. długości boków i promienia okręgu opisanego, 4. obwód trójkąta spodkowego i promień okręgu opisanego).
67. Niech E będzie punktem przecięcia się ramion trapezu. Wykaż, że punkt E oraz środki podstaw są współliniowe.