
I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 7 - 11 grudnia 2016

Liga Zadaniowa, dzień 3, wieczór

1. Ze zbioru liczb całkowitych od 1 do 100 wybrano 26 liczb. Pokaż, że da się wybrać spośród nich niepusty podzbiór liczb o iloczynie będącym kwadratem liczby całkowitej. *Podpowiedź: ile jest liczb pierwszych od 1 do 100?*
2. Czy istnieją takie wielomiany $A(x), B(x), C(y), D(y)$ że:

$$A(x) \cdot C(y) + B(x) \cdot D(y) = 1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3$$

3. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$$

4. Na bokach AB, BC, CD i DA kwadratu $ABCD$ o boku 1 obrano odpowiednio punkty K, L, M, N . Udowodnij, że obwód czworokąta $KLMN$ nie jest mniejszy niż $2\sqrt{2}$.

"I tak upłynął wieczór i poranek - dzień trzeci." - Rdz 1, 13