I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 7 - 11 grudnia 2016

Liga Zadaniowa, dzień 3, poranek

1. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna potęga dwójki, mająca n cyfr i której najbardziej znaczącą cyfrą w zapisie dziesiętnym jest 1.
2. Wielomian $W(x) = ax^2 + bx + c$ dla argumentów całkowitych przyjmuje jedynie wartości będące kwadratami liczb naturalnych. Udowodnij, że $W(x) = (dx + e)^2$ dla pewnych liczb całkowitych d, e
3. Wykonujemy na trójmianie $ax^2 + bx + c$ następujące operacje:
   (a) Zamieniamy a z c (otrzymujemy trójmian $cx^2 + bx + a$),
   (b) Wybieramy dowolną liczbę rzeczywistą x_0 i podstawiamy $x + x_0$ pod x (otrzymujemy trójmian $a(x+x_0)^2 + b(x + x_0) + c$).

   Czy stosując powyższe operacje można przejść z trójmianu $x^2 + 2016$ do $x^2 + 69x + 1008$?
4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

$$x^4 + y^4 + (x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq x^3(1 + y) + y^3(1 + x) + x + y$$