I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 7 - 11 grudnia 2016

Liga Zadaniowa, dzień 2, wieczór

1. Pokaż, że dla dowolnych $b > a > 1$ istnieją takie liczby naturalne p, q, r, s, takie, że $b > \frac{p}{q} > \frac{r}{s} > a$ oraz $p^2 - q^2 = r^2 - s^2$.

2. Zbiór punktów płaszczyzny (x, y) takich, że $ax^2 \leq y$ dla ustalonego $a > 0$ nazwiemy wiadrem. Udowodnij, że skończoną ilością takich wiader i ich izometrycznych obrazów nie pokryjesz $\mathbb{R}^2$.

3. Rozważmy zbiór wszystkich permutacji $(x_1, x_2, \ldots, x_{2017})$ ciągu $(1, 2, \ldots, 2017)$. Jaką największą wartość może osiągnąć wyrażenie:
$$S = |x_1 - 1| + |x_2 - 2| + \cdots + |x_{2017} - 2017| \text{ ?}$$

4. Niech $(x_n), (y_n), (z_n)$ będą ciągami liczb rzeczywistych dodatnich zdefiniowanymi w następujący sposób:
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + \frac{1}{y_n} \\ y_{n+1} = z_n + \frac{1}{z_n} \\ z_{n+1} = x_n + \frac{1}{z_n} \end{cases}$$
oraz $x_0, y_0, z_0 > 0$. Udowodnij, że wszystkie te ciągi są zbieżne do nieskończoności.