I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 7 - 11 grudnia 2016

Liga Zadaniowa, dzień 2

1. Oznaczmy przez $\mathfrak{C}$ zbiór:

$$\mathfrak{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} : a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

   Zdefiniujmy $(\mathfrak{C})^n$ następująco:

$$(\mathfrak{C})^n = \{r : (\exists x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathfrak{C}) \quad r = x_1 x_2 \cdots x_n\}$$

   Udowodnij, że nie istnieje niepusty przedział $[\varepsilon, 1]$ zawarty w $(\mathfrak{C})^n$ dla:

   (a) $n = 1$,

   (b) $n = 2$,

   (c) $n \in \mathbb{N}$.

2. Znajdź zbiór ortocentrów (punktów przecięcia wysokości) wszystkich trójkątów ABC wpisanych w okrąg o promieniu R i środku O.

3. Wyznacz wszystkie $n \in \mathbb{N}$ takie, że liczby od 1 do $n^2 + n$ można wpisać do tablicy $n \times (n+1)$ w taki sposób, aby sumy w każdym wierszu i każdej kolumnie były równe.

4. Pokaż, że jeżeli $0 < a_i \leq b_i$ oraz $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, to $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq b_1 b_2 \cdots b_n$.