
I Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 7 - 11 grudnia 2016

Liga Zadaniowa, dzień 1

1. Zbiór punktów płaszczyzny pomiędzy dwiema prostymi równoległymi nazwiemy pasem. Udowodnij, że skończoną liczbą pasów nie pokryjesz \mathbb{R}^2 .
2. Wiedząc, że $x \neq 0$ oraz:
 - (a) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1$
 - (b) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2$
 - (c) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 3$oblicz wartość $x^3 + \frac{1}{x^3}$.
3. Proste wyznaczone przez dwusieczne kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach W_1, W_2 i W_3 . Wykaż, że $AW_1 + BW_2 + CW_3 > AB + BC + CA$.
4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $2^a + 1 = b^2$ w liczbach całkowitych nieujemnych.