Potęga punktu

VII Uniwersytecka Sobota Matematyczna

Iwo Pilecki-Silva
Liceum Ogólnokształcące Nr III we Wrocławiu

9 marca 2019

Rozgrzewka

Zadanie 1.
Dane są dwa okręgi rozłączne zewnętrznie. Dla każdej z ich wspólnych stycznych rozważmy środek odcinka pomiędzy punktami styczności. Wykaż, że punkty te są współliniowe.

Zadanie 2.
Okrąg o środku O, wpisany w czworokąt $ABCD$, jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie P. Wykaż, że proste $OP \perp BD$.

Zadanie 3.
Sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły oraz $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykaż, że proste zawierające wysokości $\triangle BCD, \triangle DEF, \triangle FAB$, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 4.
Wewnątrz wielokąta wypukłego leży skończenie wiele parami rozłącznych okręgów. Wykaż, że można ten wielokąt podzielić na wielokąty wypukłe, z których każdy zawiera dokładnie jeden okrąg.

Zadanie 5.
Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach E i F. Przez punkt P, należący do prostej EF, poprowadzono proste styczne do okręgów ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $PK = PL$.

Zadanie 6.
Dany jest okrąg ω. Przez punkt P poprowadzono prostą styczną do ω w punkcie A oraz prostą przecinającą ten okrąg w takich punktach B i C, że $PB = BC$. Dana jest długość $PA = 1$. Obliczyć długość odcinka PB.

Zadanie 7.
Punkty A, B, C, D leżą na prostej l (w tej kolejności). Okręgi ω_C i ω_B, o średnicach odpowiednio AC i BD, przecinają się w punktach X, Y. Punkt P leży na prostej XY, niech M i N to odpowiednio przecięcia CP z $\omega_C \setminus \{C\}$ oraz BP z $\omega_B \setminus \{B\}$. Wykaż, że proste AM, DN, XY przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 8.
Okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punktach X, Y. Wspólne styczne do tych okręgów przecinają się w punkcie P. Prosta l przechodzi przez punkt P i przecina okrąg ω_1 w punktach A i C oraz okrąg ω_2 w punktach B i D, przy czym punkty P, A, B, C, D leżą w tej kolejności na prostej l. Udowodnij, że styczna do ω_1 w C, styczna do ω_2 w B oraz prosta XY przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 9.
Niech H to ortocentrum ostrokątnego trójkąta $\triangle ABC$. Okrąg o środku w środku boku BC przechodzący przez H przecina prostą BC w punktach A_1, A_2. Analogicznie definiujemy punkty B_1, B_2, C_1, C_2. Udowodnij, że punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżą na jednym okręgu.

Zadanie 10.
Dane są dwa okręgi ω_1, ω_2. Prosta l_1 jest styczna do ω_1 w punkcie A oraz do ω_2 w punkcie B tak, że okręgi te leżą po tej samej stronie l_1. Prosta l_2 jest styczna do ω_1 w punkcie C oraz do ω_2 w punkcie D tak, że okręgi te leżą po przeciwnych stronach l_2. Wykaż, że punkt $AC \cap BD$ leży na prostej łączącej środki ω_1, ω_2.

Zadanie 11.
Okrąg ω jest styczny do dwóch równoległych prostych l_1, l_2. Okręgi ω_1, ω_2 są do siebie styczne zewnętrznie w punkcie C, styczne zewnętrznie do ω w puntach A_1, A_2 odpowiednio oraz odpowiednio styczne do l_1, l_2 w punktach B_1, B_2. Niech $S = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Wykaż, że $|SC| = |SA_1| = |SA_2|$.

Zadania

Zadanie 12.
Dany jest trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$, w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na $\triangle ABC$ przecina prostą BC w punkcie P. Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q. Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej $\triangle ABC$ opuszczonej z wierzchołka A.

Zadanie 13.
Dany jest okrąg ω oraz punkty A, B leżące w nierównych odległościach od środka tego okręgu. Udowodnij, że wspólne cięciwy okręgu ω z okręgami przechodzącymi przez punkty A i B leżą na prostych mających jeden punkt wspólny.

Zadanie 14.
Okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ o promieniach odpowiednio $r_1 > r_2 > r_3$ są parami styczne wewnętrznie w punkcie K. Punkty A, B, C leżą na okręgu ω_1, przy czym odcinek AB jest styczny do okręgu ω_2 w punkcie P, a odcinek BC jest styczny do okręgu ω_3 w punkcie Q. Prosta PQ przecina drugi raz okrąg ω_3 w punkcie R. Udowodnij, że prosta AR jest styczna do okręgu ω_3.

Zadanie 15.
Dany jest $\triangle ABC$. Niech H_A, H_B, H_C to spodki wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Prosta równoległa do CA przechodząca przez B przecina się z prostą H_BH_C w punkcie X, natomiast środek odcinka AB oznaczamy jako M. Udowodnij, że $\angle ACM = \angle XH_AB$.

Zadanie 16.
W czworościanie $ABCD$ punkt P jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D. Punkty A', B', C' są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AD, BD, CD. Płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ przecinają się wzdłuż prostej l. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Udowodnić, że proste $OP \perp l$.

Zadanie 17.
Trójkąt $\triangle ABC$ spełnia zależności $AB = AC > BC$. Cięciwa BG okręgu o środku A i promieniu AB przechodzi przez środek odcinka AC, a cięciwa BH tego okręgu jest prostopadła do prostej AC. Punkt X jest punktem przecięcia prostych AC i GH. Dowieść, że punkt C jest środkiem odcinka AX.

Zadanie 18.
Niech l_1 i l_2 będą parą równoległych prostych oraz niech P, Q to dwa punkty leżące pomiędzy tymi prostymi. Dla punktu $A \in l_1$, definiujemy $A_1 = l_2 \cap AP$ oraz $A_2 = l_1 \cap A_1Q$. Analogicznie dla punktu $B \in l_1$ definiujemy punkty B_1, B_2. Wykaż, że prosta PQ przechodzi przez punkty wspólny okręgów opisanych na $\triangle PBA_2$ oraz $\triangle PAB_2$ różny od P.

Zadanie 19.
Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC $\triangle ABC$ tak, że $DE \parallel BC$. Punkt P leży wewnątrz $\triangle ADE$. Niech $F = DE \cap BP$ oraz $G = DE \cap CP$. Okręgi opisane na $\triangle DPG$ i $\triangle FPE$ przecinają się w punktach P i Q. Wykaż, że punkty A, P, Q są współliniowe.

Zadanie 20.
Dany jest czworokąt $ABCD$, na którym można opisać okrąg. Udowodnij, że zbiór punktów P takich, że

$$\angle DAP + \angle CBP = \angle CPD\,,$$

jest okręgiem.

Zadanie 21.
Niech okręgi wpisany i A-dopisany $\triangle ABC$ są styczne do BC odpowiednio w punktach D, E. Okrąg ω_B jest odbiciem okręgu wpisanego w $\triangle ABE$ w środku AB. Analogicznie definiujemy ω_C. Udowodnij, że punkt D leży na osi potęgowej okręgów ω_B, ω_C.

Zadanie 22.
Punkty A, B leżą na zewnątrz okręgu ω. Prosta l przechodząca przez punkt A przecina okrąg ω w punktach P, Q oraz proste BP i BQ przecinają okrąg ω ponownie w punktach R i S odpowiednio. Udowodnij, że wszystkie proste RS przechodzą przez pewien punkt.

Zadanie 23.
Niech $\triangle ABC$ ma kąt prosty przy wierzchołku A oraz niech D to spodek wysokości opuszczonej z A. Punkt X leży na AD, wówczas niech K to taki punkt na odcinku BX, że $|CA| = |CK|$, analogicznie definiujemy punkt L. Niech $P = BL \cap CK$. Wykaż, że $|PK| = |PL|$.

Zadania trudniejsze

Zadanie 24.
Dany jest $\triangle ABC$. Punkt P spełnia następujące równości

$$\frac{|AP|}{|BC|} = \frac{|BP|}{|CA|} = \frac{|CP|}{|AC|}.$$

Wykaż, że punkt P leży na prostej Eulera $\triangle ABC$.

Zadanie 25.
Na płaszczyźnie dane są okręgi ω_1 i ω_2, o różnych promieniach i środkach odpowiednio O_1 i O_2, przecinające się w punktach A i B tak, że $\angle O_1AO_2 = \frac{\pi}{2}$. Na odcinku AB wybrano punkt X różny od A, B oraz środka odcinka AB. Prosta O_1X przecina okrąg ω_2 w punktach P_1 i Q_1, prosta O_2X przecina okrąg ω_1 w punktach P_2 i Q_2, przy czym punkty P_1 i P_2 leżą odpowiednio na odcinkach O_1X i O_2X. Wykazać, że proste O_1O_2, P_1P_2, Q_1Q_2 przecinają się w jednym punkcie niezależnym od wyboru punktu X.

Zadanie 26.
Niech $\triangle ABC$ to trójkąt ostrokątny o środku okręgu wpisanego I. Punkty E, F są środkami krótszych łuków odpowiednio $\overset{\frown}{AC}$ i $\overset{\frown}{AB}$ okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Prosta EF przecina proste AB i AC w punktach P, Q odpowiednio. Punkt D spełnia następujące warunki $PD \parallel BI$ oraz $QD \parallel CI$. Niech T to przecięcie BF z CE. Wykaż, że punkty T, I, D są współliniowe.

Zadanie 27.
Okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w dwóch punktach. Okręgi ω_3, ω_4 są zewnętrznie styczne do ω_1 odpowiednio w punktach A_1, A_2 oraz wewnętrznie styczne do ω_2 odpowiednio w punktach B_1, B_2, ponadto okręgi te przecinają się nawzajem w punktach C, D. Wykaż, że proste A_1B_1, A_2B_2, CD przechodzą przez jeden punkt.

Zadanie 28.
Dany jest okrąg ω oraz punkt S leżący wewnątrz tego okręgu. Okręgi ω_1, ω_2 są do siebie zewnętrznie styczne w punkcie S oraz są wewnętrznie styczne do ω. Udowodnij, że zbiorem przecięć stycznych zewnętrznych do ω_1, ω_2 jest prosta.

Zadanie 29.
Dany jest $\triangle ABC$ o okręgu wpisanym ω. Trójkąt $\triangle DEF$ nazwiemy *trójkątem kappa* $\triangle ABC$ jeżeli $D, E, F \in \omega$ oraz $A \in EF$, $B \in FD$ oraz $C \in DE$. Wykaż, że dla danego $\triangle ABC$ istnieją dokładnie dwa trójkąty kappa.

Zadanie 30.
Wielokąt $A_1A_2 \ldots A_n$ jest wpisany w okrąg ω_1 i opisany na okręgu ω_2. Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definiujemy $A_{i+\frac{1}{2}} = \omega_2 \cap A_iA_{i+1}$, przy czym $A_{n+1} = A_1$. Wówczas proste $A_iA_{(i+\frac{n}{2} \bmod n)+1}$ przecinają się w jednym punkcie, który (rozważany jako okrąg o promieniu równym 0) jest współpękowy z ω_1 i ω_2.