Krzywe stożkowe

Zadanie 1 *Określić dwie takie powierzchnie stożkowe* Φ_1, Φ_2 *o wspólnym wierzchołku* S, *aby ich częścią wspólną* $\Phi_1 \cap \Phi_2$ *była: a) jedna tworząca, b) dwie tworzące c) cztery tworzące.*

Zadanie 2 *Dany jest walec obrotowy* Ψ *i płaszczyzna* π. *Wykazać, że część wspólna* Ψ *i* π *jest elipsą.*

Zadanie 3 (Styczne do krzywych stożkowych) *Niech* e *będzie elipsą o ogniskach* F_1 *i* F_2 *i niech punkt* X *należy do* e. *Wówczas dwusieczna kąta zewnętrznego przy* X *trójkąta* F_1XF_2 *jest styczna do* e. *Udowodnić analogiczne twierdzenia dla hiperboli i paraboli.*

Zadanie 4 *Elipsa o ogniskach* $F1$ *i* $F2$ *jest wpisana w kąt o wierzchołku* P *i jest styczna do jego ramion w punktach* K *i* L. *Wówczas* $\sphericalangle KPF_1 = \sphericalangle LPF_2$.

Zadanie 5 *Niech* P *będzie punktem płaszczyzny i niech proste* PK *i* PL *będą styczne do elipsy o ogniskach* F_1 *i* F_2. *Wówczas* $\sphericalangle PF_1K = \sphericalangle PF_1L$.

Zadanie 6 (Konstrukcje krzywych stożkowych) *Niech* l *będzie prostą na płaszczyźnie. Wybierzmy punkty* F_1, F_2 *i* W *tak aby* F_2 *był wewnętrznym punktem odcinka* F_1W. *Pokazać, że styczne* s_1 *i* s_2 *do dowolnego okręgu stycznego do prostej* l *w punkcie* W *i przechodzące odpowiednio przez* F_1 *i* F_2, *przecinają się w punkcie elipsy o ogniskach* F_1 *i* F_2 *i wierzchołku* W. *Znaleźć podobne konstrukcje dla hiperboli i paraboli.*

Zadanie 7 *Wykonujemy następujące doświadczenie: na kartce papieru rysujemy duży okrąg. Ustalamy punkt* P *wewnątrz narysowanego okręgu. Następnie wybieramy dowolny punkt* X *na okręgu i wykonujemy takie zgięcie kartki, żeby punkt* P *po zgięciu wylądował na punkcie* X. *Tę operację wykonujemy wielokrotnie dla różnych punktów* X. *Udowodnić, że obszar ograniczony naszymi zgięciami jest elipsą. Jakie są ogniska tej elipsy? Znajdź podobne konstrukcje dla hiperboli i paraboli.*

Zadanie 8 *Dane są na płaszczyźnie dwa okręgi* c_1 *i* c_2 *o promieniach odpowiednio* r_1 *i* r_2. *Opisać miejsce geometryczne środków* X *okręgów* c *stycznych do* c_1 *i* c_2.

Zadanie 9 *Znaleźć ogniskowe elipsy, znając dwa ogniska i jeden punkt elipsy.*

Zadanie 10 *Niech* h *będzie hiperbolą i niech* e *będzie elipsą. Pokazać, że jeżeli* h *i* e *mają te same ogniska, to przecinają się pod kątem prostym, tzn., że przecinają się pod kątem prostym w każdym z czterech punktów wspólnych.*

Zadanie 11 *Niech* p_1 *i* p_2 *będą dwoma parabolami o tym samym ognisku i tej samej prostej osi symetrii. Pokazać, że* p_1 *i* p_2 *przecinają się pod kątem prostym.*

Zadanie 12 *Na jakiej wysokości należy umieścić źródło światła, aby cień kuli na płaszczyznę styczną do tej kuli był obszarem ograniczonym parabolą? Jak umieścić dwa źródła światła, tak aby cienie kuli miały kontury przecinające się pod kątem prostym?*

Zadanie 13 *Załóżmy, że* Ψ_1 *i* Ψ_2 *są dwoma powierzchniami stożkowymi opisanymi na wspólnej kuli* K. *Pokazać, że część wspólna* Ψ_1 *i* Ψ_2 *to dwie stożkowe.*

Kilka zadań, w których warto wykorzystać właściwości elips:

Definicja. *Dany jest kąt o wierzchołku* A *i prosta* l *przechodząca przez* A. *Obraz prostej* l *w symetrii względem dwusiecznej kąta* A *nazywamy prostą izogonalną do* l.

Zadanie 14 *Niech dany będzie trójkąt ABC i proste p,g,r przechodzące odpowiednio przez punkty A,B,C. Pokaż, że jeżeli proste p,g,r spotykają się w jednym punkcie, to ich izogonalne też spotykają się w jednym punkcie. Mówimy wtedy, że te punkty są izogonalne.*

Zadanie 15 *Pokazać, że ogniska dowolnej elipsy wpisanej w trójkąt są izogonalne. Czy punkt przecięcia się wysokości trójkąta i środek okręgu opisanego na trójkącie są izogonalne? Czy wobec tego istnieje elipsa wpisana w trójkąt o ogniskach w tych dwóch punktach?*

Zadanie 16 *(LI Olimpiada Matematyczna, 3 etap) Dany jest trójkąt ABC w którym $CA = CB$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BPC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\sphericalangle APM + \sphericalangle CPB = \pi$.*