Na całej tej stronie rozpatrujemy tylko liczby naturalne!

1. Ile dzielników ma liczba $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m}$, gdzie p_i to parami różne liczby pierwsze?
2. Liczby postaci pq, gdzie p i q to (niekoniecznie różne!) liczy pierwsze, to liczby półpierwsze (semipierwsze). Ile dzielników mają liczby półpierwsze? Czy istnieją inne liczby o tylu dzielnikach?

Przypomnienie: φ to funkcja Eulera (zwana też tocjentem) – czyli…

3. Rozwiąż równania:
   $\varphi(x) = 1$, $\varphi(x) = 2$, $\varphi(x) = 3$, $\varphi(x) = 4$, $\varphi(x) = 5$, $\varphi(x) = 6$, $\varphi(x) = p$, gdzie p jest daną liczbą pierwszą, $\varphi(x) = [{}^x/_2]$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą (podłogę) liczby a, $\varphi(x) = x$, $\varphi(x) = x-1$.
4. Oblicz $\varphi(p)$, $\varphi(pq)$, $\varphi(p^k)$, gdzie p i q to liczby pierwsze. Udowodnij, że φ jest funkcją multiplikatywną, tzn. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ dla dowolnych odpowiednich(??) m i n. (Przydać się może pomysł niejakiego Sun Zi z III w.). Na tej podstawie na powyższe równania można popatrzeć bardziej systematycznie.
   A może nawet ustalisz wzór na $\varphi(n)$?!
5. Ile jest $n\in\{1, 2, \ldots, 615\}$, t. że NWD($n$, 615) = 15 ?
6. Rozwiąż równania: $\varphi(x) = {}^{2x}/_3$, $\varphi(2x) = \varphi(3x)$, $\varphi(x) = {}^x/_3$, $\varphi(x) = 110$.
7. Udowodnij, że dla dowolnej odpowiednio(?!) dużej liczby pierwszej p liczba, której zapis dziesiętny to $p-1$ dziewiątek, dzieli się przez p. Stwórz i uzasadnij analogię w zapisie dwójkowym.
8. Niech p będzie liczbą pierwszą. Oblicz $(1^p - 2^p + 3^p - \ldots + (p-2)^p - (p-1)^p) \bmod p$.
9. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, k – dowolną liczbą naturalną, a $n = (kp-1)(p-1)$. Wykaż, że $p|2^n-n$.
10. Dla jakich pierwszych p $p|3^n-n-3$, gdzie $n = p^2-5p+6$?
11. Znajdź wszystkie n, dla których $5 \nmid n^{n^3}-n^n$.
12. Dowiedź, że $43 \mid n^{n^7} - n^n$ dla dowolnego n.
13. Kol. Pierre de Fermat (1607-1665) wyraził hipotezę, że liczby postaci $2^{2^n}+1$ (tzw. liczby Fermata!) są pierwsze. 2^1+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1 i $2^{16}+1$ faktycznie są (można też udowodnić (przydatne sprytniejsze wzory skróconego mnożenia!), że jeśli liczba postaci 2^m+1 jest pierwsza, to m musi być potęgą dwójki), ale $F_5 = 2^{32}+1$ już nie (ile to z grubsza jest, wiedzą chyba Informatycy?), i można to zrobić dzięki… małemu twierdzeniu Fermata – wystarczy tylko porachować $3^{2^{32}} \bmod F_5$ – dlaczego? Jak wykonać ten rachunek? Fermat jakoś tego nie zrobił – może nie był pewny swojego dowodu MTF? (Którego tradycyjnie nie opublikował… :))
14. Uzasadnij, że z ciągu 2^2-3, 2^3-3, 2^4-3, 2^5-3, … można wybrać nieskończenie wiele liczb, z których każde dwie są względnie pierwsze.
15. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech q będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby 2^p-1. Pokaż, że $q \bmod p = 1$.
16. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, a $k \mid p^2-2$. Wykaż, że $k > 1 \Rightarrow \exists n\ (p|n-2018 \wedge k|n-2019)$.
17. Uzasadnij, że w ciągu: 3+1, 3!+1, (3!)!+1, ((3!)!)!+1, … jest nieskończenie wiele liczb złożonych.
18. Załóżmy, że p i $p+2$ to liczby pierwsze, $p|n-1$, $p+2|n-2$, a $m = n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-2)$. Dowiedź, że $p|m+1$, a $p+2|m-1$.
19. Znajdź wszystkie n, dla których $10|2n-14 \wedge 12|15n-6$.
20. Czy istnieje takie n, że $2019|n+4321 \wedge 321|n+4444$?
21. Udowodnij, że da się znaleźć 2019 kolejnych liczb naturalnych, z których każda dzieli się przez kwadrat pewnej liczby całkowitej.
22. Udowodnij, że da się znaleźć 2019 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma co najmniej 2019 dzielników pierwszych.