IV Uniwersytecka Sobota Matematyczna
14 kwietnia 2018

Funkcje tworzące w kombinatoryce

Dla ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definiujemy funkcję tworzącą:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

1. Znajdź funkcje tworzące dla poniższych ciągów. W każdym przypadku postaraj się zapisać funkcję w postaci zwartej.

(a) $1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$

(b) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

(c) $1, 3, 3, 1, 0, 0, \ldots$

(d) $\binom{2018}{0}, \binom{2018}{1}, \binom{2018}{2}, \ldots, \binom{2018}{2018}, 0, 0, \ldots$

(e) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

(f) $0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$

(g) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

(h) $2, -4, 6, -8, 10, -12, \ldots$

(i) $\binom{0}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \ldots$

Definiujemy uogólniony współczynnik dwumianowy

$$\binom{u}{k} := \frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1)}{k!}, \qquad u \in \mathbb{R}$$

wówczas

$$(1+x)^u = \binom{u}{0} + \binom{u}{1}x + \binom{u}{2}x^2 + \cdots$$

2. Dla poniższych funcji tworzących znajdź współczynnik przy składniku x^{2018}

(a) $G(x) = (1-2x)^{5000}$

(b) $G(x) = \frac{1}{1+3x}$

(c) $G(x) = \frac{1}{(1+5x)^2}$

(d) $G(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

(e) $G(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$

(f) $G(x) = (1-2x)^{2019}$

(g) $G(x) = \left(\frac{1}{1+3x}\right)^4$

(h) $G(x) = \frac{1}{2x^2+5x+2}$

3. Na ile sposobów można wybrać 4 osoby z 30?

4. Na ile sposobów można rozdać 20 identycznych prezentów 30 osobom (każdy może dostać więcej niż jeden prezent)?

5. Ile całkowitych rozwiązań spełniających $-1 \leq a \leq 2$ i $1 \leq b, c \leq 4$ ma równianie $a + b + c = 6$?

6. Ile rozwiązań całkowitych ma równianie $a+b+c+d=50$ takich, że każda zmienna

(a) jest nieparzysta i dodatnia.

(b) jest z przedziału $[4, 10]$

7. Mamy 10000 identycznych kul czerwonych, 10000 identycznych kul żółtych, 10000 identycznych kul zielonych. Na ile sposobów mozna wybrać 2005 kul tak, aby liczba kul czerwonych była nieparzysta, a żółtych parzysta.

8. Babcia chce wręczyć 100 zł czwórce swoich wnuków tak aby najmłodszy dostał co najwyżej 20zł, a najstarszy co najmniej 25 zł. Na ile sposobów może to zrobić?

9. Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego F_n: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

10. Na ile sposobów można pokryć całkowicie prostokąt rozmiaru $2\times n$ kamieniami domina o rozmiarze 2×1?

11. Na ile sposobów można pokryć całkowicie prostokąt rozmiaru $2 \times n$ kamieniami domina o rozmiarze 2×1 i 2×2?

12. Na ile sposobów można rozłożyć liczbę całkowitą n na sumę nieparzystych składników (np. $13 = 5+3+1+1+3$)?

13. Używając funkcji tworzących znajdź jawny wzór na ciąg a_n

(a) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n$.

(b) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

(c) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$.

(d) $a_0 = 0, a_{n+1} = 2a_n + 1$

(e) $a_0 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 1$

(f) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n$

(g) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

(h) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$

14. Na ile sposobów można pokryć całkowicie prostokąt rozmiaru $3\times n$ kamieniami domina o rozmiarze 2×1?

15. Pewien system komputerowy pozwala na hasła, które spełniają:

- hasło jest kombinacją 10 cyfr 0-9, 52 liter (dużych i małych) osiem znaków specjalnych !,$,%,&,x,*,(,).
- po każdej literze lub znaku specjalnym musi wystąpić cyfra.

Wyznacz liczbę możliwych haseł, których długość wynosi a) 8 b) 10.

16. Oblicz

(a) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}$

Dane są dwa ciągi: $a_0, a_1, \ldots$ o funkcji tworzącej $G_a(x)$ oraz $b_0, b_1, \ldots$ o funkcji tworzącej $G_b(x)$. Wówczas ciąg

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

nazywamy splotem, a jego funkcja tworząca G_c zadana jest wzorem

$$G_c(x) = G_a(x) G_b(x).$$

17. Oblicz

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

(b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$

(c) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$

18. Znajdź jedyny ciąg liczb rzeczywistych $a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots$ spełniający

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1$$

dla każdego naturalnego n.

19. Na ile sposobów można poprawnie rozmieścić n par nawiasów '(' i ')'? Nawiasy są poprawnie rozmieszczone jeżeli liczba nawiasów otwierających i zamykających jest taka sama oraz w dowolnym fragmencie początkowym liczba nawiasów zamykających nie jest większa od liczby nawiasów otwierających; poprawne nawiasowania: (())(), ((()())()); niepoprawne nawiasowanie: ()(()))(.

20. Rozważmy n-kąt foremny ($n \geq 4$). Na ile sposobów można go podzielić na trójkaty prowadząc nieprzecinające się przekatne?

21. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Znajdź liczbę a_n wielomianów $P(x)$ o współczynnikach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ takich, że $P(2) = n$.

22. (Chiny 2004) W talii 32 kart są 2 jokery z numerami 0 i 30 kart kolorowych. Karty kolorowe są czerwone, żółte i niebieskie (po 10) i ponumerowane od 1 do 10. Karta z numerem k jest warta 2^k punktów. Zbiór kart jest 'dobry' jeżeli suma punktów jego kart wynosi 2004. Oblicz liczbę 'dobrych' zbiorów.

23. (Harvard/MIT Mathematics Tournament 2007) Niech S oznacza zbiór wszystkich trójek (i, j, k) dodatnich liczb całkowitych takich, że $i + j + k = 17$. Oblicz

$$\sum_{(i,j,k) \in S} ijk$$

24. (Rumunia 2003) Ile jest n-cyfrowych liczb podzielnych przez 3, których cyfry są w zbiorze $\{2, 3, 7, 9\}$?

25. Dany jest ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ o funkcji tworzącej $G(x)$. Oblicz $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$.

26. Niech $S = \{1/2, 1/3, \ldots, 1/n\}$. Dla dowolnego podzbioru A zbioru S przez $P(A)$ oznaczmy iloczyn wszystkich elementów A. Oblicz sumę wszystkich takich produktów $P(A)$ wziętą po zbiorach o parzystej liczbie elementów.

27. Ala ma n monet $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Każda z monet jest niesymetryczna. Prawdopodobieństwo, że rzucając kostką C_k wypadnie orzeł wynosi $1/(2k + 1)$. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ala rzucając wszystkimi monetami po razie otrzyma nieparzystą liczbę orłów.

Niech $\omega_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ *będzie pierwiastkiem* n*-tego stopnia z jedynki. Wtedy*

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \omega_n^3 + \cdots \omega_n^{n-1} = 0$$

oraz dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$1 + \omega_n^k + \omega_n^{2k} + \omega_n^{3k} + \cdots \omega_n^{(n-1)k} = 0.$$

Ponadto jeżeli n *jest nieparzyste, to*

$$1 + x^n = (1+x)(1+\omega_n x)(1+\omega_n^2 x) \cdot \ldots \cdot (1+\omega_n^{n-1} x).$$

28. Dany jest ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ o funkcji tworzącej $G(x)$. Oblicz $a_0 + a_3 + a_6 + a_9 + \cdots$.

29. Dany jest ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ o funkcji tworzącej $G(x)$. Dla zadanej liczby naturalnej n, oblicz $a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots$.

30. Niech p będzie liczbą pierwszą. Oblicz liczbę podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \ldots, p\}$ takich, że p dzieli sumę elementów A.

31. Znajdź liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ których suma elementów jest podzielna przez 1009.

32. (IMO 1995). Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Znajdź liczbę podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ takich, że

- A ma dokładnie p elementów oraz
- suma elementów zbioru A jest podzielna przez p.

33. Czy zbiór liczb dodatnich całkowitych można rozbić na więcej niż jedną, ale wciąż skończoną liczbę ciągów arytmetycznych, z których żadne dwa nie mają identycznych przyrostów?

34. Prostokąt $a \times b$ można pokryć prostokątami $p \times 1$ oraz $1 \times q$ gdzie a, b, p, q są ustalone całkowite dodatnie. Pokaż, że a jest podzielne przez p lub b jest podzielne przez q. (Uwaga: prostokąty $k \times 1$ i $1 \times k$ są innych typów)

Zadania dodatkowe.

35. Niech a_n będzie liczbą możliwych podziałów liczby n na sumę liczb naturalnych nieparzystych, a b_n będzie liczbą możliwych podziałów liczby n na sumę różnych liczb naturalnych. Udowodnij, że $a_n = b_n$.

36. (IMO 1979). Niech A i E będą przeciwległymi wierzchołkami ośmiokąta. Żaba startuje w wierzchołku A. Z każdego wierzchołka, za wyjątkiem E żaba skacze do jednego z dwóch sąsiednich wierzchołków. Kiedy skoczy do wierzchołka E, już w nim pozostaje. Niech a_n oznacza liczbę różnych ścieżek o dokładnie n skokach kończących się w E. Udowodnij, że

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

37. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i niech

$$F(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \cdots (p-1)n^{p-2}$$

Pokaż, że jeżeli $a \neq b \mod p$, to $F(a) \neq F(b) \mod p$.

38. (IMO Shortlist 1988) Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Znajdź liczbę nieparzystych współczynników w

$$u_n(x) = (x^2 + x + 1)^n.$$

39. (Leningrad 1991) Skończony ciąg $a_1, \ldots, a_n$ liczb rzeczywistych jest k-zbalansowany jeżeli wartość

$$a_m + a_{m+k} + a_{m+2k} + \cdots$$

jest taka sama dla $m = 1, 2, \ldots, p$. Załóżmy, że ciąg $a_1, \ldots, a_{50}$ jest k-zbalansowany dla $k = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, to wszystkie jego składniki są równe 0.

40. Rzucamy monetą tak długo aż otrzymamy ciąg nieparzystej liczby orłów, a po nich reszka. Ile jest możliwych ciągów o długości n? (Np. dla $n = 13$ przykładowym ciągiem jest OOOORROOROOOR).

41. (Irlandia 1997) Ile jest 1000-cyfrowych liczb takich, że wszystkie cyfry są nieparzysta, a kolejne cyfry różnią sie o dokładnie 2.?

42. (Węgry/Izrael 1997) Ile jest ciągów o długości 1997 składających się z liter A, B, C takich, że litery A i C występują nieparzystą liczbę razy?

43. (IMO 1998, Shortlisted Problem) Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie rosnącym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych takich, że każda nieujemna liczba całkowita może być jednoznacznie przedstawiona w postaci $a_i + 2a_j + 4a_k$, gdzie i, j, k nie muszą być rozłączne. Wyznacz liczbę a_{1998}.

44. (Wielka Brytania 1994) Rosnący ciąg liczb całkowitych jest alternujący jeżeli zaczyna się liczbą nieparzystą, druga jest liczba parzysta, trzecia nieparzysta, itd. Ciąg pusty jest alternujący. Niech A_n oznacza liczbę alternujących ciągów składających się z liczb całkowitych $1, 2, \ldots, n$. Znajdź A_{20}.